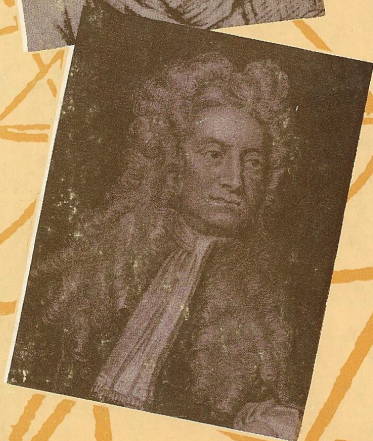
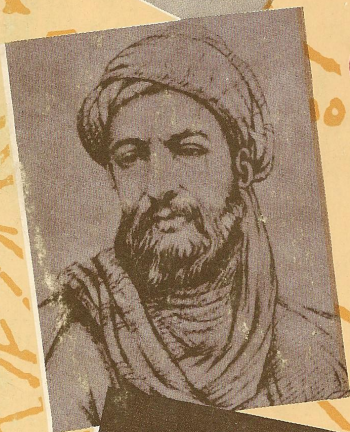
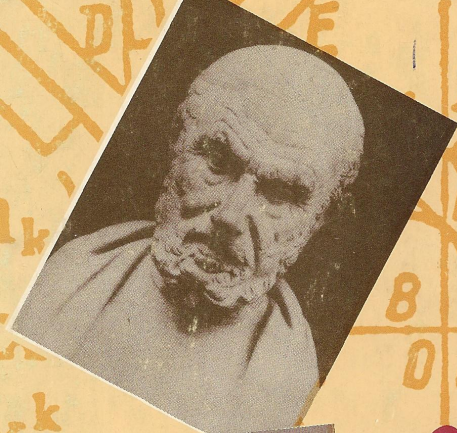




مسئله‌های تاریخی ریاضیات

واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف

ترجمه پرویز شهریاری

وانسیلی دمیتریه ویچ چیستیاکوف

مسأله‌های تاریخی ریاضیات

ترجمه پروین شهریاری



نشرنی



نشرنی

تهران، صندوق پستی ۵۵۶ - ۱۳۱۴۵، نشرنی
(تلفن: ۶۴۶۸۲۰۳)

واسیلی دمیتريه ويچ چيستياکوف

مسئله های تاریخی ریاضیات

ترجمه پرویز شهریاری

چاپ سوم: ۱۳۷۴، تهران

تیراژ: ۳۳۰۰ جلد

چاپ: غزال

همه حقوق محفوظ است

شابک ۹۶۴-۳۱۲-۰۵۵-۴

ISBN 964-312-055-4

Printed in Iran

شامل مسأله‌هایی از حساب ، جبر و هندسه ، که از کتاب‌های دانشمندان بزرگ سرزمین‌های بابل ، مصر ، یونان ، چین ، هند ، ایران ، روسیه و اروپای غربی استخراج شده است ، همراه با یادداشت‌های تاریخی و زندگی‌نامه کوتاه ریاضی دانان .

فهرست

۹-۵۰	□ فصل اول - متن مسأله‌ها
۱۱	۱. مسأله‌های بابلی
۱۱-۱۲	۲. مسأله‌های مصری
۱۱	از پاپیروس ریند
۱۲	از پاپیروس مسکو
۱۲	از پاپیروس آخمیم
۱۳-۲۰	۳. مسأله‌های یونانی
۱۳	از فیثاغورث
۱۳	از بقراط
۱۳	از اقلیدس
۱۴	از آپولونیوس
۱۴	از ارشمیدس
۱۷	از هرون
۱۸	از نیکوماکوس
۱۸	از بطلمیوس
۱۹	از پاپوس اسکندرانی
۱۹	از «جنگ یونانی»
۲۰	از متروودور

۴. مسأله‌های چینی
- ۲۱-۲۴
- از رساله «نه فصل از هنر محاسبه»
- ۲۱
- از رساله «آغاز هنر محاسبه»
- ۲۱
- از سون تزی
- ۲۱
- از رساله «ریاضیات در نه کتاب»
- ۲۱
- از لیو هوئه
- ۲۴
۵. مسأله‌های هندی
- ۲۵-۲۹
- از رساله باهشالی
- ۲۵
- از سرید هاری
- ۲۵
- از آریا بهاتا
- ۲۵
- از براهما گوپتا
- ۲۶
- از بهاسکارا
- ۲۶
- از پارامادیس وارا
- ۲۹
۶. مسأله‌های ایرانی
- ۲۹-۳۱
- از خوارزمی
- ۲۹
- از ابن سینا
- ۳۰
- از کرجی
- ۳۰
- از خیم
- ۳۰
- از بهاء الدین عاملی
- ۳۱
- از غیاث الدین جمشید کاشانی
- ۳۱
۷. مسأله‌های روسی
- ۳۱-۴۱
- از رساله‌ای مربوط به سده هفدهم
- ۳۱
- از کتاب «حساب» ل. ف. ماگیتسکی
- ۳۲
- از گولد باخ
- ۳۴
- از اولر
- ۳۴
- از ی. د. ووی دیاخوسکی
- ۳۵
- از م. یو. لرمونتوف
- ۳۶
- از و. گ. به‌نهدیکتوف
- ۳۷
- از ل. ن. تولستوی
- ۳۸

۳۹	از « کتاب القبا »
۴۰	از ایوان پتروف
۴۰	از س. آ. راجینسکی
۴۰	از آ. ن. سترانو لیو بسکی
۴۱-۵۰	۸. مسأله های اروپای غربی
۴۱	از لئوناردوی پیزائی
۴۲	از رگیومونتان
۴۲	از لئوناردو داوینچی
۴۲	از تارتا گلیا
۴۲	از کاردان
۴۳	از ویت
۴۳	از گالیله
۴۳	از کپلر
۴۳	از دزارک
۴۳	از دکارت
۴۳	از فرما
۴۵	از فولگا بر
۴۵	از والیس
۴۵	از پاسکال
۴۵	از اوزانام
۴۶	از نیوتون
۴۶	از لایب نیتس
۴۶	از سهوا
۴۷	از یاکوب برنولی
۴۷	از بهزو
۴۷	از لژاندر
۴۷	از ناپلئون
۴۸	از سوفیا ژرمن
۴۸	از گوس

۴۸	از پواسون
۴۸	از کوشی
۴۸	از بریانسون
۴۹	از شیتز
۴۹	از شتورم
۴۹	از کاتالان
۴۹	مسأله پیشنهادی به هانری مونده
۵۰	از ستووارت
۵۱-۲۶۶	□ فصل دوم - حل مسأله‌ها و یادداشت‌های تاریخی
۵۳-۵۵	۱. بابل قدیم
۵۶-۵۹	۲. مسأله‌های مصری
۶۰-۱۱۷	۳. مسأله‌های یونانی
۱۱۸-۱۴۴	۴. مسأله‌های چینی
۱۴۵-۱۶۲	۵. مسأله‌های هندی
۱۶۳-۱۷۲	۶. مسأله‌های ایرانی
۱۷۳-۱۹۷	۷. مسأله‌های روسی
۱۹۸-۲۶۶	۸. مسأله‌های اروپای غربی

فصل اول

متن مسأله‌ها

۱. مساله‌های بابلی

۱. بابلی‌ها، برای پیدا کردن محیط‌دایره، محیط شش ضلعی محاط در آن را به دست می‌آوردند. مقدار تقریبی π را، به نحوی که مورد استفاده بابلی‌ها بود، پیدا کنید.

۲. زاویه قائمه را به سه قسمت برابر تقسیم کنید.

۳. بابلی‌ها، برای محاسبه مساحت يك چهار ضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع دیگر ضرب می‌کردند. روشن کنید، در چه نوع چهار ضلعی‌هایی، این روش محاسبه، مساحت را به طور دقیق به دست می‌دهد.

بابلی‌ها، همچنین، برای محاسبه مساحت مثلث متساوی الساقین، اغلب، طول يك ساق را در نصف قاعده- مثلث ضرب می‌کردند. روشن کنید، با چه فرضی، رابطه مساحت مثلث متساوی الساقین، حالتی حدی (یا حالتی خاص) از رابطه تعیین مساحت چهار ضلعی می‌شود.

۲. مساله‌های مصری

از پاپیروس ریند

۴. عددی را پیدا کنید که اگر $\frac{2}{3}$ آن را به خودش اضافه کنیم و، سپس،

از مجموعی که به دست می آید، ثلث آن را کم کنیم، عدد ۱۵ حاصل شود.
 ۵. هفت نفر هر کدام هفت گربه دارند. هر گربه می تواند هفت موش را بگیرد، هر موش می تواند هفت خوشه جو را بجود و هر خوشه، هفت جو دارد. بزرگترین عدد این ردیف و مجموع آن ها کدام است؟

۶. مصری ها، به جای مساحت دایره، مساحت مربعی را در نظر می گرفتند که ضلع آن برابر $\frac{8}{9}$ قطر دایره باشد. از این جا، مقدار تقریبی عدد π را پیدا کنید.
 ۷. مصری ها، برای محاسبه مساحت مثلث متساوی الساقین، نصف حاصل ضرب قاعده آن را در یکی از ساق ها، به دست می آوردند. درصد اشتباه آن ها را، برای حالتی که قاعده مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

۸. مصری ها، برای محاسبه مساحت ذوزنقه متساوی الساقین، حاصل ضرب نصف مجموع دو قاعده آن را، در یکی از ساق ها به دست می آوردند. اگر از این راه، مساحت ذوزنقه ای را به دست آوریم که قاعده پایین آن برابر ۶، قاعده بالای آن برابر ۴ و یکی از ساق های آن برابر ۲ باشد، درصد اشتباه را پیدا کنید.

از پاپیروس مسکو

۹. حجم هرم ناقصی را پیدا کنید که ارتفاع آن برابر ۶، ضلع مربع قاعده پایین آن برابر ۴ و ضلع مربع قاعده بالای آن برابر ۲ باشد.
 ۱۰. اگر مساحت و نسبت ضلع های يك مستطیل معلوم باشد، طول ضلع های آن را پیدا کنید.

از پاپیروس آخمیم

۱۱. کسی $\frac{1}{13}$ خزانه را برداشت دیگری $\frac{1}{17}$ آن چه را که باقی مانده بود برداشت. در خزانه ۱۵۰ باقی ماند. در ابتدا، در خزانه چقدر بوده است؟

۳. مساله‌های یونانی

از فیثاغورث

۱۲. ثابت کنید، مربعی که روی وتر يك مثلث قائم الزاویه ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مربع‌هایی که روی دو ضلع مجاور به زاویه قائمه، ساخته شده‌اند.

۱۳. همهٔ عددهای فیثاغوری را پیدا کنید، یعنی همهٔ سه‌تایی‌های درست و مثبت x و y و z ، که در معادلهٔ $x^2 + y^2 = z^2$ صدق می‌کنند.

۱۴. مجموع جمله‌های هر رشته‌ای از عددهای فرد متوالی، که از ۱ آغاز شده باشد، مجذور کامل است.

۱۵. هر عدد فرد، به‌جز واحد، تفاضلی از دو مجذور کامل است.
در مکتب فیثاغوری، این حکم را، برای نمونه‌هایی خاص و به طریق هندسی، ثابت کرده بودند. ولسی چگونه؟ کوشش کنید، این حکم را، بدون استفاده از شکل‌های هندسی و در حالت کلی، ثابت کنید.

از بقراط خیوسی

۱۶. نیم دایره‌ای، به قطر وتر مثلث قائم الزاویه رسم کرده‌ایم. این نیم دایره، از راس زاویهٔ قائمه می‌گذرد. نیم دایره‌های دیگری، به قطر هر کدام از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ همان مثلث و در بیرون مثلث، رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مجموع مساحت‌های دوهلالی که به این ترتیب به دست می‌آید، (هلال‌های بقراط)، برابر است با مساحت خود مثلث.

از اقلیدس

۱۷. روی پاره‌خط مفروض AB ، مثلث متساوی الاضلاعی بنا کنید.

۱۸. زاویهٔ مفروضی را به دو بخش برابر تقسیم کنید.

۱۹. متوازی الاضلاعی بسازید که زاویهٔ بین دو ضلع آن معلوم و مساحت

آن برابر با مساحت مثلث مفروضی باشد.

۲۰. در دایره مفروض، مثلثی محاط کنید که با مثلث مفروض متشابه باشد.

۲۱. پاره‌خطی را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که مساحت مستطیلی که با خود پاره‌خط و یکی از بخش‌های آن ساخته می‌شود، هم‌ارز مربعی باشد که با بخش دیگر پاره‌خط ساخته شده است (مسأله تقسیم طلایی).

۲۲. ثابت کنید، عددهای اول، دنباله‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

از آپولونیوس

۲۳. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایره مفروض مماس باشد.

از ارشمیدس

۲۴. ثابت کنید، مساحت دایره محیطی یک مربع، دو برابر مساحت دایره محاطی آن است.

۲۵. ارشمیدس ثابت کرد: (۱) هر دایره، هم‌ارز است با مثلث قائم الزاویه‌ای که یک ضلع مجاور به زاویه قائمه آن، برابر شعاع دایره، و ضلع دیگر مجاور به زاویه قائمه برابر محیط باز شده دایره باشد؛ (۲) نسبت مساحت دایره به مجذور قطر آن، برابر است با نسبت ۱۱ به ۱۴.

ثابت کنید که، طبق این دو گزاره ارشمیدس، مساحت دایره برابر است

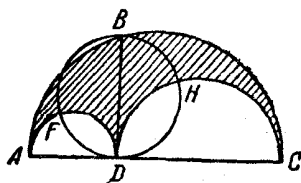
$$\text{با } \frac{22}{7} r^2$$

۲۶. نیم دایره ABC به قطر AC مفروض است. از نقطه B واقع بر محیط آن، عمود BD را بر AC فرودآورده‌ایم و نیم دایره‌های AFD و

DHC را، به ترتیب، به قطرهای AD و DC رسم کرده‌ایم (شکل ۱).

ثابت کنید، مساحت AFDHCB، شکلی که به این ترتیب به دست می‌آید، برابر است با مساحت دایره

به قطر BD



شکل ۱

۲۷. مساحت قطاع کروی برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن برابر باشد با پاره‌مخطی که راس قطاع را به یکی از نقطه‌های محیط قاعده آن وصل می‌کند.

۲۸. کره‌ای پیدا کنید که حجمی برابر با حجم يك مخروط یا يك استوانه مفروض، داشته باشد.

۲۹. استوانه‌ای که قاعده‌اش، دایره عظمیه يك کره و ارتفاعش برابر قطر همین کره باشد، حجمی برابر $\frac{3}{4}$ حجم کره و سطح کلی برابر $\frac{3}{4}$ سطح کره خواهد داشت.

۳۰. مطلوب است، مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعد هندسی نزولی

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

۳۱. مطلوب است مجموع مجذورهای π عدد طبیعی نخستین.

۳۲. عددی را نام ببرید که نه تنها از تعداد شن‌های داخل کره‌ای برابر کره زمین، بلکه از تعداد شن‌های به اندازه تمامی جهان، بیشتر باشد. به شرطی که تمامی جهان را برابر کره‌ای بگیریم که مرکز آن در مرکز زمین و شعاع آن برابر فاصله بین مرکز زمین و مرکز خورشید باشد.

۳۳. به كمك خط‌کش و پرگار، يك هفت ضلعي منتظم را، به تقریب، رسم کنید.

۳۴. مساله گاوها (با جزئی تغییر در بیان مساله):

چند گاو در سرزمین آفتاب است، برای من حساب کن ای بیگانه (اگر از خرد بیگانه نباشی، آن هارا با اندیشه خود حساب کن).

آن‌ها در دشت‌های پر علف جزیره سیسیل

زمانی، در چهار گله بزرگ، به چرا مشغول بودند.

گله‌ها را با رنگ می‌شد تمیز داد: یکی به رنگ سفید

همچون کهکشان می‌درخشید،

رنگ گله دیگر، به رنگ موج‌های تیره دریایی بود.

گله سوم کردند و آخری رنگارنگ

و در هر کدام

مجموعه‌ای از گاوهای نر با نیرویی فوق‌العاده،

که بین آن‌ها، این تناسب حفظ می‌شود:

(و تو باید در نظر بگیری، ای بیگانه)،

تعداد گاوهای نر سفید، دقیقاً برابر است با

نصف و ثلث گاوهای نر تیره و تمام کرندها؛

تعداد گاوهای نر تیره، برابر است با یک چهارم

گاوهای نر چند رنگ به اضافه یک پنجم آن‌ها و تمام کرندها،

گاوهای باپشم چند رنگ هم به این تعدادند:

به اندازه یک ششم و یک هفتم گاوهای نقره‌ای

و تمامی گاوهای نر کرند.

و حالا می‌رسیم به گروه‌های گاوهای ماده: تعداد سفیدها

برابر است با تمامی گاوهای نر و ماده تیره،

به شرطی که یک چهارم و یک سوم آن‌ها را روی هم بریزی.

تعداد گاوهای ماده سیاه هم درست،

یک چهارم تمام گاوهای چند رنگ است، به شرطی که

دوباره یک پنجم آن‌ها را به آن اضافه کنی.

و اگر، در آن جمله، از تمام گاوهای کرند،

یک پنجم و یک ششم را بگیری و روی هم بریزی،

به اندازه گاوهای ماده چند رنگ می‌شود.

برای گاوهای ماده کرند هم، باید

از تمامی گله سفید، یک ششم و یک هفتم را جدا کنی،

تو می‌گویی، چند گاو نر در سرزمین آفتاب وجود دارد؟

تعداد گاوهای نر را به‌طور جداگانه، نام ببر.

همین‌طور، تعداد گاوهای ماده را در رنگ‌های جداگانه.

در این صورت، هیچ‌کس تو را از جاهلان نخواهد دانست.

برای تعداد گاوهای نر از سرزمین آفتاب، باز هم حرف‌هایی داریم:

اگر گاوهای نر سفید و تیره را، در یک‌جا، جمع کنی،

طوری که هم در طول و هم در عرض، تنگ هم قرار گیرند،
 آن وقت، سرزمین وسیعی از سیسیل را خواهند پوشاند،
 که مربع کاملی، با مساحتی بزرگ، خواهد بود.
 اگر هم گاوهای نر کنند و چند رنگ را
 به صورت یک گله درآوری،
 می توانی آن ها را در زمینی به شکل مثلث تنگ هم جا دهی.
 لزومی ندارد، رنگ های دیگر را به هم اضافه کنیم.

مساله های مشهور و قدیمی هندسه

۳۵. مساله تضعیف (دو برابر کردن) مکعب. می خواهیم یال مکعبی را
 رسم کنیم که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد.

۳۶. مساله تثلیث زاویه. می خواهیم زاویه غیر مشخصی را، به سه
 قسمت برابر تقسیم کنیم.

۳۷. مساله تربیع دایره. مربعی رسم کنید که مساحت آن، برابر با مساحت
 دایره مفروض باشد.

از هیسیکلس اسکندرانی

۳۸. ثابت کنید، اگر تعداد جمله های یک تصاعد حسابی زوج باشد،
 مجموع جمله های نیمه دوم آن، به اندازه مضربی از مجذور نصف تعداد
 جمله ها، از مجموع نیمه نخست آن بیشتر است.

از هرون

۳۹. مطلوب مساحت مثلثی که طول ضلعهای آن، چنین باشد:

$$a=13, b=14, c=15$$

۴۰. مثلث هایی را پیدا کنید که مساحت هر کدام از آن ها، با عددی درست
 بیان شود (مثلث های هرون) و، ضمناً، طول ضلع های آن ها، عددهایی
 پشت سر هم باشند.

۴۱. ثابت کنید، اگر دنباله عددهای فرد را، به گروه‌هایی، چنان تقسیم کنیم که، تعداد جمله‌های این گروه‌ها، دنباله عددهای طبیعی را تشکیل دهند، [یعنی در گروه اول یک جمله، در گروه دوم دو جمله، ... و در گروه n ام n جمله وجود داشته باشد]، مجموع جمله‌های هر گروه، برابر با مکعب تعداد جمله‌های آن است.

از بطلمیوس

۴۲. ثابت کنید، دهر چهار ضلعی محاطی، حاصل ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های دوبره‌دوی ضلع‌های روبه‌رو.

از دیوفانت (در «رساله حساب»)

۴۳. سه عدد طوری پیدا کنید که عدد بزرگ‌تر به اندازه $\frac{1}{3}$ عدد کوچکتر،

از عدد متوسط بیشتر باشد، همچنین، عدد متوسط به اندازه $\frac{1}{3}$ عدد بزرگتر، از عدد کوچکتر بیشتر باشد و، بالاخره، عدد کوچکتر، به اندازه $\frac{1}{3}$ واحد از $\frac{1}{3}$ عدد متوسط بیشتر باشد.

۴۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=68 \end{cases}$$

۴۵. یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مکعب کامل است. ضلع دیگر پهلوی زاویه قائمه این مثلث، برابر است با تفاضل همان ضلع و کعب آن؛ و وتر مثلث برابر با مجموع آن ضلع و کعب آن است. ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

۴۶. می‌خواهیم عدد ۱۰۰ را دوبار طوری تقسیم کنیم که قسمت بزرگتر تقسیم اول، دوبرابر قسمت کوچکتر تقسیم دوم و قسمت بزرگتر تقسیم دوم، سه برابر قسمت کوچکتر تقسیم اول باشد.

۴۷. دو عدد پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۲۰ و حاصل ضربشان ۹۶ باشد.
۴۸. دو عدد پیدا کنید که نسبت آن‌ها برابر ۳ و نسبت مجموع مجذورهای آن‌ها به مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد.

۴۹. سه عدد پیدا کنید، به نحوی که حاصل ضرب مجموع دو عدد اول و دوم در عدد سوم برابر ۳۵، حاصل ضرب مجموع دو عدد اول و سوم در عدد دوم برابر ۲۷ و حاصل ضرب مجموع دو عدد دوم و سوم در عدد اول، برابر ۳۲ باشد.

۵۰. دو عدد پیدا کنید که، اگر حاصل ضرب آن‌ها را به هر کدام از دو عدد اضافه کنیم، در هر حال، یک مکعب کامل به دست آید.
۵۱. سه عدد طوری پیدا کنید که هم مجموع آن‌ها و هم هر کدام از مجموع‌های دو به دوی آن‌ها، مجذور کامل باشد.

از پاپوس اسکندرانی (در رساله «مجموعه ریاضیات»)

۵۲. نقطه P بر نیمساز زاویه‌ای داده شده است. از این نقطه، خط راستی چنان رسم کنید که پاره خطی از آن، که محدود به دو ضلع زاویه است، برابر طول مفروض باشد.

۵۳. ثابت کنید، نسبت مساحت‌های دو قطعه متشابه در دو دایره، برابر است با نسبت مربع وترهایی که قاعده این دو قطعه را تشکیل می‌دهند.

۵۴. روی یکی از ضلع‌های یک مثلث غیر مشخص، متوازی الاضلاعی ساخته‌ایم، به نحوی که قسمتی از آن در داخل مثلث قرار گیرد و دو رأس آن در دو طرف ضلع‌های دیگر مثلث و در بیرون آن‌ها واقع باشند. سپس، روی هر کدام از دو ضلع دیگر متوازی الاضلاع‌هایی می‌سازیم که در خارج مثلث واقع شوند و ضلع‌هایی از آن‌ها که موازی ضلع‌های مثلث‌اند، از رأس‌های متوازی الاضلاع قبلی بگذرند. ثابت کنید، مساحت متوازی الاضلاع اول، برابر است با مجموع مساحت‌های دو متوازی الاضلاع دیگر.

از «جنگ یونانی»

۵۵. به من بگو، فیثاغورث نام‌دار، چند شاگرد به مکتب تو می‌آید و

به بحث‌های تو گوش می‌دهد؟

وفیثاغورث پاسخ داد:

- تعداد آن‌ها چنان است که نیمی از آن‌ها ریاضیات می‌خوانند، يك چهارم آن‌ها، نواهای دلتواز موسیقی را فرا می‌گیرند، يك هفتم آن‌ها در حال تفکرند و، به جز این‌ها، سه زن هم وجود دارد.

۵۶. الاغ و قاطر، با بار سنگینی که بر پشت خود داشتند، پهلوبه‌پهلوی هم راه می‌رفتند. الاغ از بار بی‌اندازه سنگین خود شکوه می‌کرد. قاطر به او پاسخ داد: «تو چرا گله‌داری؟ اگر من يك کیسه از تو بگیرم، بار من درست دوبرابر تو خواهد شد، درحالی‌که اگر تو يك کیسه از من بگیری، آن وقت، بارهایمان برابر خواهد شد». الاغ و قاطر، هر کدام، چند کیسه بار بر پشت خود دارند؟

۵۷. ای الههٔ زمان، چه قسمتی از روز گذشته است؟

- دوبرابر دوسوم آن چه گذشته، هنوز باقی مانده است (در یونان باستان، روز را ۱۲ ساعت به حساب می‌آوردند).

از مترو دور

۵۸. این‌جا دیوفانت آرمیده است و این، سنگ مزار اوست.

با حسابی هنرمندانه، برای ما حکایت می‌کند.

که زندگی او چقدر طول کشیده است.

به فرمان یزدان، کودکی او، يك ششم زندگی او بود،

جوانی او، در يك دوازدهم زندگی او بود.

يك هفتم زندگیش را درزنشویی بدون فرزند گذراند.

پنج سال که گذشت، پسر او به دنیا آمد.

ولی چه بدبختی! پسر به اندازهٔ نیمی از زندگی پدر عمر کرد.

دیوفانت، چهار سال آخر عمرش را، در غم از دست دادن فرزندش

به سر برد.

و او که برای دانش زندگی می‌کرد، مرد.

به من بگو، دیوفانت چند سال زیسته است؟

۴. مساله‌های چینی

از رساله «نه فصل از هنر محاسبه»

۵۹. ۵ گاو و ۲ گوسفند، ۱۱ «تاول» می‌ارزند؛ ولی ۲ گاو و ۸ گوسفند، ۸ «تاول» قیمت دارند. قیمت هر گاو و هر گوسفند، چقدر است؟
 ۶۰. سه دزد از سه بشکه برنج یا گنجایش برابر، مقداری برنج دزدیدند. معلوم شد، در بشکه اول ۱ «هو»، در بشکه دوم ۱ «شینگ» و ۲ «هو»، و در بشکه سوم ۱ «هو» برنج باقی مانده است. دزدها شهادت دادند: اولی از بشکه اول و با بیلچه، دومی از بشکه دوم و با کفش چوبی و سومی از بشکه سوم و با کاسه، برنج برداشته‌اند. بیلچه ۱ «شینگ» و ۹ «هو»، کفش چوبی ۱ «شینگ» و ۷ «هو» و کاسه ۱ «شینگ» و ۲ «هو» گنجایش دارند. هر دزد چقدر برنج برده است، به شرطی که ۱۰ «هو» برابر ۱ «شینگ»، ۱۰ «شینگ» برابر ۱ «تاو» و ۱۰ «تاو»، برابر ۱ «شی» باشد.

از رساله آغاز هنر محاسبه

۶۱. اگر مساحت و محیط يك مثلث قائم الزاویه معلوم باشد، ضلع‌های آن را پیدا کنید.

از سون تزی

۶۲. عددی پیدا کنید که در تقسیم بر ۳، به باقی‌مانده ۲، در تقسیم بر ۵ به باقی‌مانده ۳ و، سرانجام، در تقسیم بر ۷ به باقی‌مانده ۲ برسد.

از رساله «ریاضیات در نه کتاب»

۶۳. انباری داریم به عرض ۳ «چژان» و طول ۴ «چژان» و ۵ «چی». این انبار را با ۱۰۰۰۰۰ «هو» نمک پر کرده‌ایم. ارتفاع انبار چقدر است؟
 ۶۴. خیزرانی داریم که از ۹ بند تشکیل شده است. حجم ۳ بند پایینی ۴ «شه‌نا» و حجم ۴ بند بالایی بالایی ۳ «شه‌نا» است. می‌خواهیم حجم ۲ بند

دیگرا پیداکنیم، به شرطی که تفاوت حجم هر دو بند متوالی، مقدار ثابتی باشد.

۹۰۶۵ شمش طلا و ۱۱ شمش نقره داریم. وزن شمش‌های طلا برابر است با وزن شمش‌های نقره. یکی از شمش‌های طلا را با یکی از شمش‌های نقره عوض کرده‌ایم، وزن طلاها ۱۳ «لان» سبک‌تر شد. وزن هر شمش طلا و هر شمش نقره چقدر است؟

۹۰۶۶ اسبی راه‌وار و اسبی بی‌زور از «چایتانی» به طرف شاهزاده‌نشین «تسی»، که ۳۰۰۰ «لی»، با «چایتانی» فاصله داشت، حرکت کردند. اسب راه‌وار در روز اول ۱۹۳ «لی» و روزهای بعد، هر روز ۱۳ «لی» بیشتر دوید. اسب بی‌زور روز اول ۹۷ «لی» و روزهای بعد، هر روز نیم «لی» کمتر حرکت کرد. اسب راه‌وار، که اول به شاه زاده‌نشین رسیده بود، بلافاصله برگشت و در نقطه‌ای به اسب بی‌زور رسید. می‌خواهیم بدانیم، بعد از چند روز به هم رسیده‌اند و، در این مدت، هر کدام چقدر راه رفته‌اند؟

۹۰۶۷ ۵ گاومیش و ۲ گوسفند، ۱۰ «لین» طلا و ۲ گاومیش و ۵ گوسفند،

۸ «لین» می‌ارزند. قیمت هر گاومیش و هر گوسفند چقدر است؟

۹۰۶۸ از ۳ خرمن خوب، ۲ خرمن متوسط و ۱ خرمن بد، ۳۹ «دواو»

غله به دست آمده است. از ۲ خرمن خوب، ۳ خرمن متوسط و ۱ خرمن بد،

۳۴ «دواو» و، بالاخره، از ۱ خرمن خوب، ۲ خرمن متوسط و ۳ خرمن بد،

۲۶ «دواو». می‌خواهیم بدانیم، از هر نوع خرمن، چقدر محصول به دست

می‌آید؟

۹۰۶۹ از ۲ خرمن خوب، ۳ خرمن متوسط و ۴ خرمن بد، محصول‌هایی

به دست آورده‌ایم که، به ترتیب، به اندازه محصول ۱ خرمن متوسط، ۱ خرمن

بد و ۱ خرمن خوب، کمتر از ۱ «دواو» است از هر نوع خرمن، چقدر غله

می‌توان به دست آورد.

۹۰۷۰ وزن ۲ خرمن A، يك «دان» از وزن خرمن B بیشتر است و

وزن ۳ خرمن B، يك «دان» از وزن خرمن C بیشتر است و، بالاخره، وزن

۴ خرمن C، يك «دان» از وزن خرمن A بیشتر است وزن هر کدام از

خرمن‌های A، B و C چقدر است؟

۲۰۷۱ گاو میش و ۵ گوسفند فروختند؛ با پول آن ۱۳ خوک خریدند، ۱۰۰۰ «تسیان» باقی ماند، ۳۰ گاو میش و ۳ خوک فروختند، ۹ گوسفند خریدند، چیزی باقی نماند. ۶ گوسفند و ۸ خوک فروختند، ۵ گاو میش خریدند، ۶۰۰ «تسیان» کم آوردند. قیمت هر گاو میش، هر گوسفند و هر خوک چقدر است؟

۲۲. ۵ خانواده، یک چاه مشترک دارند. این خانواده‌ها، برای آوردن آب به سطح زمین، طناب‌های خود را آزمایش کردند. برای این منظور، معلوم شد که ۲ طناب خانواده A به اندازه ۱ طناب B از عمق چاه کمتر است. همچنین ۳ طناب خانواده B به اندازه یک طناب خانواده C کوتاه است؛ ۴ طناب خانواده C به اندازه یک طناب خانواده D کوتاه است؛ ۵ طناب خانواده D به اندازه ۱ طناب خانواده E و، بالاخره، ۶ طناب خانواده E به اندازه یک طناب خانواده A کوتاه است. عمق چاه و طول هر طناب از هر خانواده چقدر است؟

۲۳. برکه آبی به ضلع ۱ «چژان» وجود دارد. در مرکز آن، یک نی روییده است که درست ۱ «چی» از آب بیرون زده است. اگر نی را به طرف کنار برکه خم کنیم، سر نی به کنار برکه می‌رسد. عمق برکه و ارتفاع نی را پیدا کنید (هر «چژان» برابر است با ۱۰ «چی»).

۲۴. دو نفر در یک جا ایستاده‌اند. معیار راه رفتن A برابر ۷ و معیار راه رفتن B برابر ۳ می‌باشد. B به طرف مشرق می‌رود. A، ۱۰ «بو» به طرف جنوب می‌رود، بعد راه خود را کج می‌کند و به طرف شمال شرقی حرکت می‌کند، تا به B برسد، هر کدام از دو نفر A و B چقدر راه رفته‌اند؟

۲۵. دری وجود دارد که ارتفاع آن، به اندازه ۶ «چی» و ۸ «تسون» از عرض آن بیشتر است. بزرگترین فاصله بین رأس‌های آن (قطر)، ۱ «چژان» است. ارتفاع و عرض در را پیدا کنید.

۲۶. شهری است به شکل مربع، با طول ضلع مجهول. در وسط هر کدام از ضلع‌های آن یک دروازه قرار دارد. در فاصله ۲۰ «یو» از دروازه شمالی یک ستون واقع است. اگر از دروازه جنوبی به اندازه ۱۴ «یو» به طرف جنوب برویم و بعد ۱۷۷۵ «یو» به طرف مغرب برگردیم، می‌توانیم ستون را ببینیم.

مطلوب است طول ضلع شهر.

۷۷. قطر يك چاه برابر ۵ «چی» و عمق آن مجهول است. در کنار محیط بالای چاه، دیرکی به ارتفاع ۵ «چی» قرار دارد. رأس دیرك با سطح آب درجایی که با دیوار چاه تماس دارد و نقطه‌ای از قطر دهانه چاه که با کناره آن ۴ «تسون» فاصله دارد، روی يك خط راست قرار دارند. عمق چاه را پیدا کنید.

۷۸. مخروطی داریم که محیط قاعده آن ۳ «چژان» و ۵ «چی» و ارتفاع آن ۵ «چژان» و ۱ «چی» می باشد. حجم مخروط چقدر است؟

۷۹. مخروط ناقص دواری داریم که قاعده پایین آن ۳ «چژان»، محیط قاعده بالای آن ۲ «چژان» و ارتفاع آن ۱ «چژان» است. حجم آن را پیدا کنید.

۸۰. ضلع افقی يك مثلث ۱ «یو» و ضلع قائم آن ۱۲ «یو» است. مطلوب است طول ضلع مربع محاط در این مثلث.

۸۱. ستون در فاصله مجهولی از يك شخص قرار دارد. ۴ سکو داریم که دو به دو به فاصله ۱ «چژان» از یکدیگر قرار دارند. ناظری چنان ایستاده است که سکو درست چپ او واقع شده است و خودش در کنار سکوی طرف راست و پایین ایستاده است. این ناظر، ستون را در فاصله ۳ «تسون» از سکوی بالا و سمت راست می بیند. فاصله شخص را تا ستون پیدا کنید.

۸۲. کوه در غرب ستون قرار دارد و ارتفاع آن مجهول است. فاصله کوه تا ستون، برابر ۵۳ «لی» است. ارتفاع ستون، برابر ۹ «چژان» و ۵ «لی» است. شخصی در فاصله ۳ «لی» در شرق ستون ایستاده است و قلّه کوه را با رأس ستون در يك امتداد می بیند. چشم این شخص در ارتفاع ۷ «چی» واقع شده است. ارتفاع کوه را پیدا کنید.

از لیو هوئه

۸۳. روی تپه‌ای، درخت کاجی با ارتفاع مجهول روییده است. پایین، در جلگه، دو دیرك، هر کدام به ارتفاع ۲۰ پا (a)، طوری قرار دارند که با درخت در يك خط راست و به فاصله ۵۰ گام (b) از یکدیگر واقع شده‌اند.

رأس درخت و انتهای دیرك اول، خط راستی تشکیل می دهند که درفاصله ۷ گام و ۴ پایی دیرك به زمین می رسد (c). رأس درخت و انتهای دیرك دوم، خط راستی تشکیل می دهند که درفاصله ۸ گام و ۵ پایی دیرك (d) به زمین می رسد. می خواهیم، ارتفاع درخت کاج (x) و فاصله دیرك اول را از تپه (y)، پیدا کنیم.

۵. مساله های هندی

از رساله باهشالی

۸۴. چهار نفر، هر کدام مقداری نیاز کردند. سهم نیاز دومی دو برابر اولی، سومی سه برابر دومی و چهارمی چهار برابر سومی بود. آن ها روی هم ۱۳۲ ریال دادند. اولی چقدر داده است؟
۸۵. عددی پیدا کنید که اگر ۵ واحد به آن اضافه یا ۱۱ واحد از آن کم کنیم، در هر حال مجذور کامل به دست آید.

از سرید هاری

۸۶. يك پنجم از گروه زنبورهای عسل روی يك درخت گل و يك سوم آن ها روی درخت گل دوم نشستند. سه برابر تفاوت این دودسته، روی درخت گل سوم جا گرفتند، و يك زنبور باقی مانده بین کندو و درخت در پرواز بود. تعداد همه زنبورها چقدر است؟

از آریابهااتا

۸۷. دو ستاره به فاصله معینی (d) از یکدیگر واقع شده اند و با سرعت های مفروضی (v_1 و v_2) به طرف یکدیگر می روند. نقطه برخورد آن ها را پیدا کنید.

۸۸. تعداد هسته های يك توده مثلی را پیدا کنید.

۸۹. سرمایه دو نفر با هم برابر است. ضمناً هر کدام از آن ها تعداد

معلومی کالا و مقدار معلومی پول نقد دارند. قیمت هر کالا مقدار ثابتی است. ولی هم تعداد کالای هر کدام و هم مقدار پول نقد هر کدام، با دیگری فرق دارد. قیمت هر کالا چند است؟

۹۰. يك قاعده قدیمی هندی می گوید: اگر قطر دایره را به ۱۵ بخش برابر تقسیم و ۱۳ بخش آن را به عنوان ضلع يك مربع انتخاب کنیم، مساحت مربع (به تقریب) برابر مساحت دایره می شود. معلوم کنید، مقدار تقریبی عدد π از این راه چقدر به دست می آید و درصد اشتباه آن چقدر است؟

از براهماگوتتا

۹۱. مطلوب است ارتفاع يك شمع، به شرطی که سایه يك تکه چوب قائم را در دو ضلع متفاوت و، همچنین، فاصله بین دو تکه چوب را بدانیم.

۹۲. ثابت کنید که اگر حاصلضرب دو ضلع مثلث را بر طول ارتفاعی که بر ضلع سوم وارد شده است، تقسیم کنیم قطر دایره محیطی مثلث به دست می آید.

۹۳. ثابت کنید، اگر مجذور وتری را که بر قطر دایره عمود است، بر چهار برابر یکی از دو بخش قطر تقسیم و خارج قسمت را با همان بخش قطر جمع کنیم، طول قطر دایره به دست می آید.

۹۴. ثابت کنید، بخش کوچکتر قطر دایره، که به وسیله وتر عمود بر آن تقسیم شده است، برابر است با نصف تفاضل قطر از جذر تفاضل مجذورهای قطر و وتر.

از بهاسکارا

۹۵. اگر عددی را در ۵ ضرب، از حاصلضرب يك سوم آن را کم، باقی مانده را بر ۱۰ تقسیم و، به نتیجه به دست آمده، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ عدد اصلی را اضافه کنیم، عدد ۶۸ به دست می آید. عدد اصلی را پیدا کنید.

۹۶. ثابت کنید:

$$\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

۹۷. مثلث قائم الزاویه ای را پیدا کنید که عدد معرف وتر آن با عدد معرف مساحت آن برابر باشد.

۹۸. دو چوب خیزران به طول‌های m و n را، به فاصله‌ای معلوم و به‌طور قائم روی زمین نگاه داشته‌ایم. مطلوب است طول عمودی که از محل برخورد خط‌های راستی که انتهای هرچوب را به پای دیگری وصل کرده‌است، بر زمین فرود آید. همچنین، فاصله پای این عمود را تا پای هریک از دو خیزران پیدا کنید.

۹۹. کسی به دوستش گفت: «۱۰۰ روپیه به‌من بده، آن وقت، من دو برابر تو پول خواهم داشت». دومی پاسخ داد: «تو فقط ۱۰ روپیه به‌من بده، پول من شش برابر پول تو خواهد شد». هر کدام چقدر پول دارند؟

۱۰۰. معادله درجه دوم زیر را در حالت کلی حل کنید:

$$ax^2 + bx = c$$

۱۰۱. عددی را پیدا کن که اگر آن را در ۳ ضرب، حاصلضرب را با $\frac{2}{3}$ خودش جمع، نتیجه را بر ۷ تقسیم، $\frac{3}{10}$ خارج قسمت را از خودش کم، تفاضل را در خودش ضرب، از حاصلضرب ۵۲ واحد کم کنیم؛ بعد از تفاضل جذر بگیریم، ۸ واحد به آن اضافه و بعد بر ۱۰ تقسیم کنیم، عدد ۲ بدست آید.

۱۰۲. به اندازه جذر نصف زنبورهای عسل، به طرف بوته گل یاسمن پرواز کردند، هشت نهم آن‌ها در کندو ماندند. یکی از زنبورها هم به دنبال زنبور نری رفت که وزوزش او را ناراحت کرده بود. این زنبور نر، به سمت گل معطری جلب شده بود، ولی نمی‌توانست از آن جا بیرون بیاید، زیرا به محض نشستن زنبور، گل بسته شده بود. تعداد کل زنبورهای عسل را پیدا کنید.

۱۰۳. عددی را پیدا کنید که اگر آن را در ۱۲ ضرب و نتیجه را با مکعب خودش جمع کنیم، با شش برابر مجذور آن به اضافه ۳۵، برابر شود.

۱۰۴. این معادله را حل کنید:

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

۱۰۵. جواب‌های گویا را در این معادله پیدا کنید:

$$ax + by + c = xy$$

۱۰۶. مطلوب است ارتفاع قطعه‌ای از دایره، به شرطی که اندازه قطر دایره و قاعده قطعه دایره، معلوم باشد.

۱۰۷. میمون‌ها، در دو دسته، سرگرم بازی بودند. مجذوریك هشتم آن‌ها در بیشه به شادی جست و خیز می‌کردند. باد خنك هم فریاد ۱۲ نفر از آن‌ها را از جای دیگری به گوش می‌رساند. می‌توانید بگویید روی هم، چند میمون در آن جا وجود دارد؟

۱۰۸. چند میمون در گله وجود دارد، به شرطی که بدانیم، مجذور تفاضل يك پنجم و سه نفر آن‌ها در غار باقی مانده‌اند و تنها یکی از آن‌ها از درخت بالا می‌رود؟

۱۰۹. ضمن مجادله، پسر خشمگین «پریته‌ها» چند تیر برای کشتن «کارنا» برداشت. نصف تیرها را برای دفاع از خودش مصرف کرد؛ چهار برابر جذر تیرها را، علیه اسب‌ها به کار برد؛ با ۶ تیر، «سالیو»ی عرابه‌چی را سوراخ سوراخ کرد؛ با ۳ تیر چترنگهدار «کارنا» را از پای درآورد و زین و پرچم را سرنگون کرد و تنها با يك تیر باقی‌مانده، سر «کارنا» را سوراخ کرد. «آرجونا» (فرزند «پریته‌ها») چند تیر داشت؟

۱۱۰. ده برابر جذر گله قوها، به طرف دریاچه پریدند، زیرا متوجه درهم رفتن ابرها شده بودند. يك هشتم تمام گله، خود را زیر گل و گیاه آبی مخفی کردند و تنها شش قو خود را به آرامی به امواج سپردند. تعداد کل قوها را به من بگویید.

۱۱۱. روی دریاچه آرام، به اندازه نیم پا

گل زیبایی ایستاده است.

او تنهاست. وزش باد آغاز شد

و آن را به طرفی خم کرد. دیگر

هیچ بخشی از گل روی آب نیست.

ماهی گیر، آن را در دوپائی

جائی که روئیده بود، پیدا کرد.

حالا پرسشی دارم:

عمق دریاچه در این جا چقدر است؟

۱۱۲. سپیداری تنها، در کنار رودخانه روییده است.

ناگهان باد تندی وزید و تنه آن را شکست.

تنه بیچاره افتاد. باقی مانده تنه

با جریان رودخانه زاویه ای قائمه می سازد.

به یاد بیاوریم که، سرشاخه سپیدار،

در چهارپائی این جا به زمین خود

وسه پاهم، از تنه، باقی مانده است.

اکنون از شما خواهش می کنم، زود به من بگویید:

ارتفاع درخت سپیدار چقدر بوده است؟

از پارامادیس وارا

۱۱۳. عددی را پیدا کنید که اگر آن را در ۳ ضرب، سپس بر ۵ تقسیم

و بعد با ۶ جمع کنیم، آن وقت از آن جذر بگیریم، یک واحد از آن کم کنیم و

نتیجه را مجذور کنیم، عدد ۴ به دست آید.

۱۱۴. معادله $y^2 = ax^2 + 1$ را حل کنید. این مساله بعدها، و در

اروپا، به مساله «په لی» معروف شد.

۱۱۵. ثابت کنید، اگر در یک چهار ضلعی؛ قطرهای برهم عمود باشند،

جذر مجموع مربع های هردو ضلع روبه رو، برابر است با قطر دایره محیطی

چهار ضلعی.

۶. مساله های ایرانی

از خوارزمی

۱۱۶. این معادله های درجه دوم را حل کنید:

۱) $5x^2 = 40x$,

۲) $\frac{25}{9}x^2 = 100$,

$$۳) ۱۰x = x^2 + ۲۱,$$

$$۴) x^2 = ۱۲x + ۲۸۸,$$

$$۵) x^2 + ۲۰\frac{1}{4} = ۱۱\frac{1}{4}x,$$

$$۶) \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = ۱۹$$

۱۱۷. دريك مثلث متساوی الساقين، كه طول هرساق آن برابر ۱۰ و طول قاعده آن برابر ۱۲ می باشد، يك مربع محاط كنید.

۱۱۸. عددی را پیدا كنید كه اگر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ آن را از خودش كم كنیم، ۸ باقی بماند.

از ابن سینا

۱۱۹. اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقی مانده ۱ یا ۸ برسد، مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹، باقی مانده ای برابر ۱ خواهد داشت.

از كرجی

۱۲۰. عددی پیدا كنید كه از ضرب آن در $3 + \sqrt{5}$ ، عدد ۱ به دست آید.

۱۲۱. این دستگاه را حل كنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = ۱۰ \end{cases}$$

۱۲۲. مطلوب است مساحت مستطیلی كه قاعده آن دو برابر ارتفاع، و عدد مساحت آن برابر عدد محیط آن باشد.

از خیام

۱۲۳. این معادله را حل كنید.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = ۱\frac{1}{4}$$

۱۲۴. عدد ۱۰ را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که تفاوت آن‌ها برابر ۵ باشد.

۱۲۵. به زید قول دادند که سه اندازه بزرگترین عدد از دو عددی که مجموعی برابر ۲۰ و حاصل ضربی برابر ۹۶ دارند، پاداش بدهند. مقدار این پاداش چقدر است؟

۱۲۶. ارتفاع h و r و R ، شعاع‌های دو قاعده بالا و پائین یک مخروط ناقص است. ارتفاع مخروط کامل متناظر آن را پیدا کنید.

۱۲۷. می‌خواهیم عددی را پیدا کنیم که، اگر آن را در خودش ضرب، سپس دو واحد به آن اضافه، بعد دو برابر، دوباره سه واحد به آن اضافه، بعد بر ۵ تقسیم و بالاخره، در ۱۰ ضرب کنیم، عدد ۵۰ به دست آید.

از غیاث الدین جمشید کاشانی

۱۲۸. نیزه‌ای به طور عمودی در آب قرار گرفته و سه اندازه ۳ ارش از آب بیرون است. باد نیزه را منحرف کرد و آن را در آب، به این ترتیب غرق کرد که راس آن بر سطح آب قرار گرفت و پای آن برجای سابق خود باقی ماند. فاصله بین موقعیت اول و موقعیت دوم آن، برابر ۵ ارش است. می‌خواهیم ارتفاع نیزه را پیدا کنیم.

۱۲۹. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، برابری زیر برقرار است.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

(برابری کاشانی).

۷. مساله‌های روسی

از رساله‌ای مربوط به سده هفدهم

۱۳۰. چهار نجار، برای انجام کاری در یک کاخ اجیر شدند. نجار اول

گفت: «اگر قرار بود تمام کار را من به تنهایی انجام دهم، می بایستی يك سال در این جا بمانم». نجار دوم گفت: «اگر قرار بود تمام کار را به تنهایی تمام کنم، دو سال وقت مرا می گرفت». سومی گفت: «اگر تمام کار را به من مراجعه می کردند، به تنهایی می توانستم در طول سه سال آن را تمام کنم». و چهارمی گفت: «اگر قرار بود تمامی کار تنها به عهده من باشد، می بایستی چهار سال در این کاخ بمانم». به من بگوئید، حالا که هر چهار نفر با هم کار می کنند، در چه مدتی کار را تمام خواهند کرد؟

۱۳۱. شیر، يك ميش را در يك ساعت، گرگ آن را در دو ساعت و سگ در سه ساعت می خورند. اگر هر سه، شیر و گرگ و سگ، بر سر يك ميش بنشینند، در چه مدت آن را می خورند؟

۱۳۲. مسیحی، سبد تخم مرغ های خود را، برای فروش، به بازار برد. دکان دارها از او پرسیدند: «چند تخم مرغ در سبد داری؟» مسیحی پاسخ داد: «من تعداد تخم مرغ ها را به یاد ندارم، فقط می دانم، وقتی آن ها را دوتا دوتا در سبد گذاشتم، يك تخم مرغ روی زمین باقی ماند. بعد، سه تا سه تا در سبد گذاشتم، باز هم یکی باقی ماند، به همین ترتیب، وقتی که چهار تا چهار تا، یا پنج تا پنج تا و یا شش تا شش تا در سبد گذاشتم، باز هم هر بار يك تخم مرغ اضافه می آمد. تنها وقتی که تخم مرغ ها را هفت تا هفت تا در سبد قرار دادم، چیزی کم یا زیاد نیامد». مسیحی در سبد خود چند تخم مرغ داشته است؟

از کتاب «حساب» ل. ف. ماگینتسکی

۱۳۳. بازرگانی ۱۱۲ گوسفند پیر و جوان خرید ۴۹ روبل و ۲۰ آلتین پرداخت. او بابت هر گوسفند پیر ۱۵ «آلتین» و ۲ «دنگا» و بابت هر گوسفند جوان ۱۰ «آلتین» پرداخته بود. او چند گوسفند پیر و چند گوسفند جوان خریده است؟

۱۳۴. یکی از معلم پرسید، «شما در کلاس خود چند شاگرد دارید، زیرا می خواهم پسر را، برای درس خواندن، پیش شما بفرستم». معلم پاسخ داد: «اگر به اندازه شاگردانم، به اضافه نصف آن و يك چهارم آن، بیشتر

شاگرد داشتم، آن وقت با پسر تو، روی هم ۱۰۰ نفر می شدند^۱. این معلم، چند شاگرد دارد؟

۱۳۵. شخصی اسب خود را به ۱۵۶ روبل فروخت. ولسی خریدار پشیمان شد، به فروشنده مراجعه کرد و از گرانی قیمت گله کرد. فروشنده پیشنهاد دیگری به او کرد و گفت: «در هر شصت اسب من ۶ میخ وجود دارد. تو اصلاً اسب را کنار بگذار و فقط میخ‌ها را از من بخر. بابت میخ اول فقط $\frac{1}{4}$ کوپک بده (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپک است)، بابت میخ دوم، دو برابر

آن، یعنی $\frac{1}{2}$ کوپک، بابت میخ سوم، دو برابر میخ قبلی، یعنی ۱ کوپک و همین طور تا آخر»، خریدار که به نظرش رسید، قیمت اسب خیلی ارزان برایش تمام می‌شود، با پیشنهاد فروشنده موافقت کرد. آیا واقعاً خریدار پول کمتری خواهد پرداخت؟

۱۳۶. مردی دستور داد خیمه‌ای برای او درست کنند که محیط آن در روی زمین برابر ۱۲۰ «استوپ» و بلندی آن (در روی لوله) برابر ۱۲۰ «استوپ» باشد. برای ساختن خیمه از ماهوتی استفاده کردند که عرض آن $2\frac{1}{2}$ «آرشین» بود و هر «آرشین» ۲ روبل قیمت داشت. قیمت همه ماهوتی که برای ساختن خیمه لازم است، چقدر می‌شود؟

۱۳۷. عددی را پیدا کنید که در تقسیم بر عددهای ۲، ۳، ۴ و ۵، به ترتیب، به باقی مانده‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ برسد.

۱۳۸. عددهای هفته را از یکشنبه آغاز می‌کنیم و به ترتیب آن‌ها را با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (برای شنبه) نشان می‌دهیم. کسی، عدد یکی از روزهای هفته را پیش خود فکر می‌کند و از شما می‌خواهد آن را پیدا کنید.

۱. این مساله، به صورتی موزون، در کتاب‌های ریاضی قدیمی ایرانی و، به این صورت، وجود دارد، گنجشکی از يك گروه گنجشك پرسید، شما چند نفرید؛ یکی از آن‌ها پاسخ داد: «ما و ما و نصف ما و نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی ۱۰۰ می‌شویم». (مترجم)

او این عمل را انجام داده است: ۱) عدد روزی را که فکر کرده است در ۲ ضرب می کند؛ ۲) به حاصل ضرب، ۵ واحد اضافه می کند؛ ۳) مجموع را در ۵ ضرب می کند؛ ۴) حاصل ضرب را ۱۰ برابر می کند و نتیجه را نام می برد.

۱۳۹. شخصی يك جعبه نوشابه را در ۱۴ روز تمام می کند؛ ولی همان جعبه را همراه با همسرش در ۱۰ روز مصرف می کند. اگر همسرش به تنهایی از نوشابه ها استفاده کند، در چه مدتی آن را تمام می کند؟

۱۴۰. شخصی کارگری را یکساله اجیر کرد و قرار گذاشت روی هم ۱۲ روبل و يك دست لباس به او بدهد. ولی وضعی پیش آمد که کارگر تنها هفت ماه توانست کار کند و، برای این مدت کار خود، ۵ روبل و يك دست لباس گرفت. قیمت يك دست لباس چقدر است؟

از گولد باخ

۱۴۱. ثابت کنید، هر عدد به صورت $1 + 2n^2$ (n، عددی است طبیعی)، تنها به ازای $n = 1$ می تواند عددی اول باشد.

۱۴۲. مطلوب است. مجموع همه کسرهای به صورت

$$\frac{1}{(n+1)^{m+1}}$$

که در آن، m و n عبارتند از دنباله عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ...
۱۴۳. هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. این حکم را در مورد چند عدد دو رقمی آزمایش کنید.

از اولر

۱۴۴. هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. این حکم را در مورد چند عدد دو رقمی نشان دهید.

۱۴۵. آیامی توان، به ترتیب،

از روی هر هفت پل کینگسبرگ (حالا، کالنین گراد) - که منطقه های مختلف شهر را به جزیره رود پره گل مربوط می کنند - عبور کرد، به نحوی که از هر



شکل ۲

پل تنها يك بار بگذریم (شكل ۲)؟

۱۴۶. دودھقان، روی هم، ۱۰۰ تخم مرغ به بازار بردند. باوجودی که تعداد تخم مرغ های آن ها برابر نبود، هر دو بابت فروش کالای خود، يك مبلغ دریافت کردند. اولی گفت: «اگر من به اندازه تسو تخم مرغ داشتم، الان ۱۵ كوپك داشتم». دومی پاسخ داد: «ولی اگر من به اندازه تو، تخم مرغ داشتم، به $\frac{2}{3}$ كوپك می فروختم». هر کدام چند تخم مرغ داشته اند؟

۱۴۷. عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{8 - 5\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$$

۱۴۸. ثابت کنید، در هر مثلث، نقطه برخورد میانه ها، نقطه برخورد ارتفاع ها و مرکز دایره محیطی، روی يك خط راست قرار دارند (خط راست اولر).
۱۴۹. عدی پیدا کنید که، اگر بتوان چهارم آن را بر نصف خودش تقسیم

و، سپس، بسا $14\frac{1}{4}$ جمع کنیم، عدد ۱۰۰ به دست آید.

۱۵۰. ثابت کنید، حاصل ضرب دو عددی که، هر کدام از آن ها برابر مجموع چهار مربع کامل است، خود با مجموع چهار مربع کامل برابر می شود.
۱۵۱. ثابت کنید، در هر چهار ضلعی، مجموع مجذورهای ضلع ها، برابر است با مجموع مجذورهای دو قطر به اضافه چهار برابر مجذور پاره خطی که وسط قطر ها را به هم وصل می کند.

از ی. د. وی دباخوسکی (از کتاب «دوره ریاضیات خالص»)

۱۵۲. از فرمانده پرسیدند، چند نفر در گروه او خدمت می کنند. او پاسخ داد: $\frac{2}{5}$ گروه او به پاسداری مشغول اند، $\frac{2}{7}$ به مرخصی رفته اند، $\frac{1}{4}$ آن ها در بیمارستان کار می کنند و ۲۷ نفر هم حاضرند. تعداد افراد گروه او را پیدا کنید.

۱۵۳. سگ در ۱۵۰ متری خرگوشی است که هر دو دقیقه ۵۰۰ متر می دود. اگر سگ در هر ۵ دقیقه ۱۳۰۰ متر بدود، بعد از چه مدتی به خرگوش

از م. یو. لرمونتوف

۱۸۵۴. یکی از معاصران میخائیل یوریه‌ویچ لرمونتوف، که شاعر رابه خوبی می‌شناخت، می‌نویسد: «در آغاز سال ۱۸۴۱، هنگ «تن‌گین» در «آنپ» توقف کرده بود. افسران هنگ، و از آن جمله لرمونتوف، که دلتنگ بودند، دورهم جمع می‌شدند. یک بار، صحبت از دانش اسقف بزرگی بود که می‌توانست دشوارترین مسأله‌های ریاضی را در ذهن خود حل کند. یکی از سرگردهای افتخاری، که پیرمردی بود، روبه شاعر کرد و گفت:

لرمونتوف، عقیده شما در این باره چیست؟ می‌گویند، شما هم ریاضی‌دان خوبی هستید.

و شاعر پاسخ داد:

- من چیز عجیبی در این مورد نمی‌بینم. اگر بخواهید، من هم می‌توانم از تجربه جالبی درباره محاسبه‌های ریاضی با شما صحبت کنم.

- بفرمائید.

- عددی پیش خودتان فکر کنید، من به کمک عمل‌های ساده‌ای از حساب آن را پیدا می‌کنم.

- عددی که باید در نظر بگیریم، تا چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟

- تفاوتی ندارد. ولی بار اول، برای سرعت کار محاسبه، عددی دورقمی در نظر بگیرید.

- بسیار خوب، عددی را در نظر گرفتیم.

پیرمرد با بیان این جمله، به افسرانی که دور او ایستاده بودند چشمکی زد و به خانمی که پهلویش نشسته بود، عدد مورد نظر خود را اطلاع داد.

و لرمونتوف آغاز کرد:

- لطفاً در ذهن خود، یا روی کاغذ، عدد ۲۵ را به آن اضافه کنید.

پیرمرد مدادی گرفت و روی کاغذ یادداشت کرد.

- حالا لطفاً باز هم ۱۲۵ را به آن اضافه کنید.

پیرمرد اضافه کرد.

- اکنون، همان عددی را که فکر کرده‌اید، از آن کم کنید.

پیرمرد کم کرد.

- باقی مانده را در ۵ ضرب کنید.

سرگرد ضرب کرد.

- عددی را که به دست آورده‌اید، نصف کنید.

پیرمرد تقسیم کرد.

- اکنون دوست من، اگر اشتباه نکرده باشید، باید به عدد $۲۸۲\frac{۱}{۲}$

رسیده باشید.

سرگرد از جا پرید

- بلکه کاملاً درست است: $۲۸۲\frac{۱}{۲}$. من عدد ۵۰ را در نظر گرفته بودم،

و سرگرد دوباره عمل‌ها را آزمایش کرد. ولی مگر شما جادوگرید؟

لرمونتوف لبخندی زد

- جادو بی جادو، این‌جا فقط ریاضیات است.

معلوم بود که پیرمرد هنوز دودل است، شاید وقتی او محاسبه می کرده

است، لرمونتوف، نوشته روی کاغذ را دیده است.

- ولی اجازه بدهید... می شود يك بار دیگر تکرار کنیم؟

پیرمرد درباره عددی که فکر کرده بود، با کسی سخن نگفت، عمل‌ها را

هم روی کاغذ نوشت و در ذهن محاسبه کرد. ولی این بار هم، نتیجه آخر درست

حس زده شده بود.

برای همه جالب بود. پیرمرد حاج و واج شده بود. صاحب منزل

خواهش کرد یکبار دیگر آزمایش را تکرار کنند. این بار هم عدد حاصل، درست

حس زده شده بود.»

از و.گ. به نه دیکتوف

۱۵۵. زنی روستائی، که نود تخم مرغ برای فروش داشت، سه دختر

خود را روانه بازار کرد و به بزرگترین و عاقل ترین آن ها ده تخم مرغ، به

دیگری سی و به سومی پنجاه تخم مرغ سپرد. ضمناً، به آن ها گفت:

از قبل، درباره قیمت فروش، بین خودتان قرار بگذارید و از آن عقب نشینی نکنید؛ همه شما قیمت ثابتی برای خود تعیین کنید؛ ولی من امیدوارم که دختر بزرگ من، با توجه به درایتی که دارد، با وجود قرار کلی که برای قیمت فروش گذاشته‌اید، بتواند بابت ده تخم مرغ خود، همان قدر دریافت کند که دختر دوم من بابت سی تخم مرغ خود می‌گیرد؛ و دختر دوم هم بابت سی تخم مرغ خود، همان اندازه پول می‌آورد که دختر کوچکم بابت پنجاه تخم مرغ خود دریافت می‌کند. ضمناً، امیدوارم همه تخم مرغ‌ها را طوری بفروشید که هر ده تخم مرغ از ۱۰ کوپک و همه نود تخم مرغ از ۹۰ کوپک، یا ۳۰ آلتین، کمتر نشود.

دخترها، چگونه سفارش مادر خود را انجام دادند؟

از ل. ن. تولستوی

۱۵۶. تولستوی، در داستان خود «آیا آدمی به زمین زیادی نیاز دارد؟»: به دهقان آن قدر زمین داده می‌شود که بتواند در يك روز آن را دور بزند. روی چگونه محیطی حرکت کند، به زمین بیشتری می‌رسد: روی محیط يك مربع، یا يك شش ضلعی منتظم و یا يك دایره؟

راهنمایی: ببینید، وقتی محیط این شکل‌ها برابر باشند، سطح کدام يك بیشتر است؟

۱۵۷. دو گروه دروگر باید دو زمین را درو کنند، که یکی از آن‌ها، مساحتی دو برابر دیگری دارد، تمام گروه، نصف روز را روی زمین بزرگتر کار کردند. سپس، گروه به دو قسمت شد: نصف گروه در همان زمین بزرگتر باقی ماند و کار درو آن را تا غروب تمام کرد؛ نیمه دوم گروه به درو کردن زمین کوچکتر پرداخت و، در پایان روز، آن قدر کار باقی مانده بود که يك کارگر بتواند در يك روز آن را تمام کند. در این گروه، چند کارگر وجود دارد؟

۱۵۸. روی دودیوار روبه‌رو از اطاقی که طول و عرض معلومی دارد، مگس و عنکبوتی ایستاده‌اند. مگس، يك و نیم آرشین از کف اطاق و عنکبوت، يك و نیم آرشین از سقف فاصله دارند. کوتاه‌ترین راهی را پیدا کنید که عنکبوت، از طریق آن، بتواند خود را به مگس برساند.

۱۵۹. پنج برادر، ارثیه پدر را به طور برابرین خود تقسیم کردند. ارثیه، سه خانه بود. ولی سه خانه را نمی شد به پنج قسمت تقسیم کرد. سه برادر بزرگتر، هر کدام یکی از خانه ها را برداشتند و در عوض نفری ۸۰۰ روبل دادند که بین دو پسر کوچکتر تقسیم شد و، در نتیجه، هریک از پنج برادر، سهمی برابر از ارثیه بردند، قیمت هر خانه را پیدا کنید.

۱۶۰. دهقان، ساعت ۵ صبح، پای پیاده از تولا به راه افتاد تا به مسکو برود. ارباب هم ساعت ۱۲ با درشکه خود از تولا در همان مسیر به راه افتاد دهقان در هر ساعت ۵ ورست و ارباب در هر ساعت ۱۱ ورست جلو می رود در چند ورستی تولا، به هم می رسند؟

۱۶۱. دهقانی ۷۰ دسیاتین زمین را اجاره کرد و بابت هر دسیاتین ۸ روبل به مالک پرداخت؛ و همه ۷۰ دسیاتین را گندم کاشت. برای هر دسیاتین زمین ۹ پوت بذر خرید، هر پوت به ۱ روبل و ۳۰ کوپک. برای هر دسیاتین زمین، ۸ روبل پول کارگر داد. هر دسیاتین، ۱۳ خرمن گندم داد که از هر خرمن ۶ پوت گندم به دست آمد. برای خرمن کوبی، هر پوت ۷ کوپک پرداخت. بابت کرایه حمل گندم به شهر، هر پوت ۱۱ کوپک پول داد. گندم را هر پوت ۱ روبل و ۴ کوپک فروخت. آیا دهقان بیشتر برده است یا مالک؟

۱۶۲. کسی که بازی شطرنج را اختراع کرده بود، مهره های زیبایی برای آن ساخت و به شاه هدیه کرد. شاه از بازی خوشش آمد و از مخترع آن خواست تا چیزی بخواهد. مرد گفت: «در خانه اول صفحه شطرنج يك دانه گندم بگذارید، در خانه دوم ۲ دانه، در خانه سوم ۴ دانه و، به همین ترتیب، در هر خانه، دو برابر خانه قبلی؛ آن وقت، این گندمها را به من بدهید». شاه از حقیر بودن چیزی که مرد خواسته بود خنده اش گرفت؛ ولی وقتی که گندمها را حساب کردند، دیدند شاه از عهده تهیه آن ها بر نمی آید. شاه چقدر گندم باید به مخترع شطرنج بدهد؟

۱۶۳. دو لوله بالای بشکه قرار دارد که از هر دوی آن ها، آب وارد بشکه می شود. لوله اول می تواند به تنهایی، بشکه را در ۲۴ دقیقه و لوله دوم،

به تنهایی، در ۱۵ دقیقه پر کند. در پایین بشکه شیری وجود دارد که می تواند در ۲ ساعت آب بشکه را خالی کند. اگر آب از هردو لوله وارد بشکه شود و، ضمناً، شیر بشکه باز باشد، بعد از چه مدتی پر می شود؟

از ایوان پتروف

۱۶۴. اگر بلیت هایی به ارزش سه روبل و پنج روبل داشته باشیم، به چند طریق می توانیم ۷۸ روبل بدهی خود را بپردازیم؟

از س. آ. راجینسکی

۱۶۵. مقدار عبارت زیر را، به طور ذهنی و با سرعت بگویید:

$$\frac{۱۰۲ + ۱۱۲ + ۱۲۲ + ۱۳۲ + ۱۴۲}{۳۶۵}$$

۱۶۶. در ذهن خود محاسبه کنید که، مجذور ۸۴ چقدر است؟

از آن. سترانولیوبسکی (در کتاب «دوره جبر»)

۱۶۷. بازرگانی که ۷۵۳ روبل بدهکار بود، از طلبکار خود خواست ۳۰۳ روبل دیگر هم به او بدهد. طلبکار به انجام خواهش او رضایت داد، با این شرط که: قرض باید در مدت ۸ ماه پرداخت شود، و، ضمناً، قسط های خود را باید طوری تنظیم کند که هر ماه به اندازه نصف قسط ماه اول به قسط او اضافه شود، یعنی، در پایان ماه دوم یک برابر و نیم ماه اول، در پایان ماه سوم دو برابر ماه اول، در پایان ماه چهارم دو برابر و نیم ماه اول و غیره بپردازد. بدهکار هم با این شرط موافقت کرد می خواهیم مقدار پرداختی بدهکار را در ماه اول و هر یک از ماه های بعد پیدا کنیم.

۱۶۸. دو کارگر در زمان معینی نزدیک صاحب کار بودند. یکی از آن ها هفته ای ۱۵ روبل و دیگری هفته ای ۱۰ روبل می گرفت. در پایان کار، معلوم شد، کارگر اول، درست به اندازه ای که در جریان کار مساعده گرفته بود، بیش از کارگر دوم مزد گرفت. اگر کارگر اول، در سه نوبت و به ترتیب، $۳\frac{۱}{۴}$ ، $۴\frac{۱}{۲}$ و ۷ روبل مساعده گرفته باشد، معلوم کنید کار چه مدتی طول کشیده است؟

۱۶۹. پدری $\frac{1}{3}$ سرمایه خود را به پسر و $\frac{2}{5}$ آن را به دخترش بخشید. از

آن چه مانده بود، ۲۰۰۰ روبل بابت بدهی خودش پرداخت و ۳۰۰۰ روبل هم به همسرش داد. سرمایه اصلی پدر و سهم پسر و دختر را پیدا کنید.

۱۷۰. وقتی که از کسی، درباره سن پسرهایش پرسیدند، پاسخ داد: «پسر اولم، دو برابر پسر دومم از سالهای عمرش گذشته است و سن آنها، روی هم، برابر است با سن ۲۹ سال قبل من؛ و من، اکنون ۴۵ سال دارم». هریک از پسر ها چند سال دارند؟

۱۷۱. سرکه فروشی دو نوع سرکه خرید، نوع اول را هر ۵ سطل ۱۵۰ روبل و نوع دوم را هر ۷ سطل ۱۴۰ روبل. او می خواهد مخلوطی از این دو نوع سرکه تهیه کند، به نحوی که اگر سطلی ۳۰ روبل بفروشد، در هر سطل ۳ روبل سود کند. از هر نوع سرکه چند سطل باید بردارد تا مخلوط مورد نظر او به دست آید؟

۱۷۲. نقره کاری دو نوع نقره دارد. نوع اول، ملقمه های سه فونتی به ارزش هر کدام ۲۸۸ روبل و نوع دوم، ملقمه های چهار فونتی به ارزش هر کدام ۲۲۸ روبل. او می خواهد ظرفی ۲۰ فونتی از این دو نوع بسازد، به نحوی که اگر ظرف را فونتی ۹۳ روبل بفروشد، در هر فونت ۳ روبل برای مزد کار خود به دست آورد. برای نقره این ظرف، از هر نوع چند فونت باید انتخاب کند؟

۸. مسأله های اروپای غربی

از لئوناردوی پیزانی

۱۷۳. یکی به دیگری گفت: «۷ دینار به من بده تا ۵ برابر تو پول داشته باشم». دیگری گفت: «۵ دینار به من بده تا ۷ برابر تو پول داشته باشم». هر کدام چقدر پول دارند؟

۱۷۴. یک نفر ۳۰ پرنده خرید و ۳۰ سکه داد: بابت هر ۳ گنجشک

۱ سکه، بابت هردوقمري ۱ سکه و بابت هر کبوتر ۲ سکه تعداد هر نوع پرنده را پيداکنيد.

از رگيومونتان

۱۷۵. اين معادله را حل کنيد.

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 25$$

۱۷۶. ثابت کنيد، ارتفاع‌های مثلث، دريك نقطه به هم می‌رسند.

از لئوناردو داوینچی

۱۷۷. اگر دو دایره مساوی، یکدیگر را قطع کنند، هر نقطه دلخواه از خط راستی که از نقطه‌های برخورد گذشته است، از دوبرکز به يك فاصله است.
۱۷۸. به سه نفر، اسبی را به ۱۲ فلورین می‌فروختند، ولی هیچ کدام از آنها، به این اندازه، پول نداشت. اولی می‌گفت: «اگر هر کدام از شما، نصف پول خود را به من می‌دادید، خودم اسب را می‌خریدم». دومی به دو نفر دیگر گفت: «اگر یک سوم پول خودتان را به من می‌دادید، می‌توانستم صاحب اسب بشوم». و بالاخره، سومی گفت: «فقط يك چهارم پولتان را به من بدهید، من اسب را خواهم خرید». می‌خواهیم بدانیم، هر کدام چقدر پول داشته‌اند؟

از تارتاگليا

۱۷۹. به كمك پرگار ثابت (پرگاری که به اندازه معینی باز شده است و قابل تغییر نیست) و خط کش، مثلث متساوی الاضلاعی روی پاره خط مفروض AB رسم کنيد (شعاع پرگار، برابر طول پاره خط AB نیست).

از کاردان

۱۸۰. ریشه مثبت معادله $x^2 + 6x = 91$ را پيداکنيد.

۱۸۱. عدد ۱۰ را به دو بخش چنان تقسیم کنيد که حاصل ضرب آنها برابر ۴۰ شود.

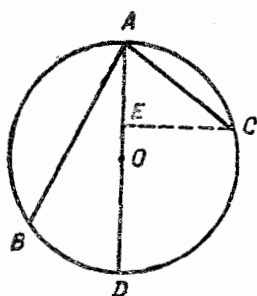
۱۸۲. مماس مشترك دو دایره مفروض را رسم کنید.

از ویت

۱۸۳. معادله $x^2 + px + q = 0$ را، با تبدیل $x = y + z$ ،

حل کنید.

از گالیله



شکل ۳

۱۸۴. روی دیوار قائم، دایره‌ای

رسم شده است (شکل ۳). از نقطه

فوقانی دایره، یعنی از نقطه A، در

طول وترهای AB و AC، دوناودان

قرار داده ایم. از نقطه A، در يك لحظه،

سه گلوله را رها کرده ایم که یکی به

صورت سقوط آزاد پایین می آید و

دوتای دیگر دوناودانهای صیقلی شده،

بدون اصطكاك می غلطند. کداميك از این سه گلوله، زودتر به محیط دایره

می رسند؟

از کیپلر

۱۸۵. سه خط راست موازی l ، m و n مفروض اند. نیم خطهای

راست SA، SB و SC، خط راست l را در نقطه های A، B و C و خط

راست m را در نقطه های E، F و H قطع کرده اند. از نقطه های E و F، H و

سه خط راست به موازات نیم خط راست SP رسم می کنیم تا خط راست n

را در نقطه های L، M و N قطع کند. ثابت کنید، خطهای راست

LA، MB، NC و SP، در يك نقطه به هم می رسند.

از دزارك

۱۸۶. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ ، روی دو صفحه σ و σ_1 قرار

گرفته اند. ثابت کنید، اگر خطهای راستی که رأسهای متناظر A و A_1 ،

B و B_1 ، C و C_1 را به هم وصل می کنند، در يك نقطه به هم برسند (نقطه

دزارك)، آن وقت، ضلع‌های متناظر AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 ، به شرط این که موازی باشند، در سه نقطه واقع بريك خط راست، یکدیگر را قطع می کنند (خط راست دزارك). برعکس، اگر نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر، روی يك خط راست واقع باشند، آن وقت، خط‌های راستی که رأس‌های متناظر را به هم وصل می کنند، به شرط موازی نبودن آن‌ها، در يك نقطه به هم می رسند.

۱۸۷. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ ، در يك صفحه واقع اند. ثابت کنید، اگر خط‌های راستی که رأس‌های متناظر A و A_1 ، B و B_1 ، C و C_1 را به هم وصل می کنند، در يك نقطه به هم برسند (نقطه دزارك)، آن وقت، ضلع‌های متناظر AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 ، به شرطی که موازی نباشند، در سه نقطه واقع بريك خط راست یکدیگر را قطع می کنند (خط راست دزارك). برعکس، اگر سه نقطه برخورد ضلع‌های متناظر، بريك خط راست واقع باشند، آن وقت، خط‌های راستی که رأس‌های متناظر را به هم وصل می کنند، به شرطی که بایکدیگر موازی نباشند، در يك نقطه به هم می رسند.

از دکارت

۱۸۸. این معادله را حل کنید:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 136x - 120 = 0$$

از فرما

۱۸۹. ثابت کنید، اگر مجموع جمله‌های يك تصاعد هندسی نزولی و

$$\frac{S}{S - a_1} = \frac{a_1}{a_2} \dots, \text{ برای } S \text{ باشد، داریم:}$$

۱۹۰. روی قطر AB از نیم دایره AMB ، مستطیلی دربرون نیم-

دایره، ساخته ایم، به نحوی که ارتفاع AC آن، برابر با ضلع مربع محاط در دایره باشد. اگر رأس‌های C و D را به نقطه دلخواه M از محیط نیم دایره وصل کنیم، خط‌های راست CM و DM ، قطر نیم دایره را در نقطه‌های E و F قطع می کنند. ثابت کنید:

$$AF^2 + BE^2 = AB^2$$

۱۹۱. ثابت کنید، برای x ، y و z نمی توان سه عدد درست پیدا کرد، به نحوی که در معادله $x^4 + y^4 = z^4$ صدق کنند.

از فولگایر

۱۹۲. OA ، OB و OC را سه یال دوبره دو عمود برهم از یک چهار-وجهی به رأس O می گیریم و فرض می کنیم، A ، B و C سه نقطه دلخواه از این یال ها باشند، ثابت کنید:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

که در آن، منظور از S_{ABC} ، S_{OAB} ، S_{OAC} و S_{OBC} ، به ترتیب، عبارت باشند از مساحت مثلث های ABC ، OAB ، OAC و OBC .

از والیس

۱۹۳. ثابت کنید، از میان همه مستطیل های با محیط برابر، حداکثر مساحت، متعلق به مربع است.

از پاسکال

۱۹۴. ثابت کنید، اگر یک شش ضلعی قابل محیط بر دایره باشد و، ضمناً ضلع های متقابل آن، با هم موازی نباشند، سه نقطه برخورد این ضلع های متقابل، روی یک خط راست قرار می گیرند (خط راست پاسکال).
۱۹۵. حالت حدی مسأله بالا را تنظیم کنید و، از آن جا، قضیه های جالبی درباره پنج ضلعی محاطی و چهار ضلعی محاطی و مثلث به دست آورید.

۱۹۶. نشانه بخش پذیری بزرگ عدد دلخواه را پیدا کنید.

از اوزانام

۱۹۷. سه نفر می خواهند خانه ای را به ۲۶۰۰۰ لیور بخرند. قرار گذاشتند، اولی یک دوم، دومی یک سوم و سومی یک چهارم پول را بپردازد. هر کدام چقدر پول داده اند؟

۱۹۸. عبارت $y^4 - \frac{1}{4}a^2y^2 + \frac{3}{4}a^2y - \frac{1}{4}a^4$ را بر عبارت

$$y^2 - 2ay + a^2$$
 تقسیم کنید.

۱۹۹. پاره خط راست BC داده شده است. در دوانتهای آن، تحت زاویه‌های معلوم ABC و ACB، خطهای راست BA و CA را رسم کرده‌ایم. فاصله نقطه برخورد آنها، یعنی A، را از خط مفروض BC پیدا کنید.

۲۰۰. ۱۲ گاو $\frac{1}{3}$ آکر از چراگاه را در ۴ هفته خوردند؛ ۲۱ گاو ۱۰ آکر از همان چراگاه را در ۹ هفته خوردند. چند گاو ۲۴ آکر چراگاه را، در ۱۸ هفته، می‌خورند.

۲۰۱. تاجری، هر سال به سرمایه‌اش، به اندازه یک سوم آن، اضافه می‌کند؛ ولی ۱۰۰ فونت از آن را، برای مخارج خانواده برمی‌دارد. بعد از ۳ سال، معلوم شد، سرمایه او دو برابر شده است. می‌خواهیم بدانیم، در ابتدا چقدر پول داشته است؟

از لایب نیتس

۲۰۲. ثابت کنید:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

از سه ۱۹۴

۲۰۳. سه نقطه L، M و N را، به ترتیب، بر ضلع‌های BC، CA و AB از مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، شرط لازم و کافی، برای این که خطهای راست AL، BM و CL موازی باهم و یا در یک نقطه متقاطع باشند، این است که داشته باشیم:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

۲۰۴. با استفاده از نتیجه گیری مسأله سهوا، ثابت کنید: (۱) میانه‌های مثلث در یک نقطه به هم می‌رسند؛ (۲) ارتفاع‌های مثلث در یک نقطه به هم می‌رسند؛ (۳) نیمسازهای مثلث در یک نقطه به هم می‌رسند.

از یاکوب برنولی

۲۰۵. اگر دو جمله اول یک تصاعد حسابی، مثبت و نابرابر باشند و، ضمناً، به ترتیب برابر با دو جمله اول یک تصاعد هندسی بشوند، همه جمله‌های تصاعد حسابی، از جمله سوم به بعد، از جمله‌های متناظر خود در تصاعد هندسی، کوچکتر خواهند بود.

از به زو

۲۰۶. کسی اسبی خرید و، بعد از مدتی، آن را به ۲۴ پیستول فروخت در این معامله ضرر کرد. اگر مبلغ ضرر او برابر باشد با درصد ضرر او از خرید، قیمت خرید اسب را پیدا کنید.

۲۰۷. ثابت کنید، باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای درجه n ام

$$f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

بر $x - b$ ، برابر است با عددی که از قرار دادن b به جای x ، در چند جمله‌ای، به دست می‌آید؛ یعنی

$$f_n(b) = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \dots + a_{n-1} b + a_n$$

از لژاندر

۲۰۸. ثابت کنید، در هر مثلث مستقیم‌الخط، مجموع زاویه‌های داخلی، نمی‌تواند از $2d$ بیشتر باشد ($d = 90^\circ$)؛ ضمناً، برای اثبات، از اصل موضوع توازی یا نتیجه‌های آن (یعنی، معادل‌های اصل موضوع توازی)، استفاده نکنید.

از ناپلئون

۲۰۹. محیط دایره مفروضی را، که جای مرکز آن معلوم است، به کمک یک پرگار و بدون استفاده از خط‌کش، به چهار قسمت برابر تقسیم کنید.

۲۱۰. ثابت کنید، هر عدد به صورت $a^4 + 4$ ، عددی است غیر اول $(a < 1)$.

از گوس

۲۱۱. ثابت کنید، حاصل ضرب دو عدد درست و مثبت، که هر کدام از آن‌ها، از عدد اول p کوچکترند، نمی‌تواند بر p بخش پذیر باشد.

۲۲۲. يك هفده ضلعی منتظم، به كمك خط كش و پرگار، رسم کنید.

از پواسون

۲۱۳. شخصی ۱۲ «پینت» شراب دارد و می‌خواهد نصف آن را بردارد؛ ولی ظرف ۶ پینتی ندارد. اگر دو ظرف، یکی به گنجایش ۸ پینت و دیگری به گنجایش ۵ پینت در اختیار داشته باشد، به چه ترتیب می‌تواند ۶ پینت شراب را در ظرف ۸ پینتی بریزد؟

از کوشی

۲۱۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

که در آن، $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، عددهایی مثبت‌اند و، ضمناً، حالت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

از بریانسون

۲۱۵. ثابت کنید، در هر شش ضلعی محیطی، خط‌های راستی که راس‌های روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، از يك نقطه می‌گذرند (نقطه بریانسون).

۲۱۶. ثابت کنید: (۱) در هر پنج ضلعی محیطی، دو خط راستی که راس‌های غیر مجاور را به هم وصل می‌کنند، با خطی که از راس پنجم به نقطه تماس ضلع مجاور وصل می‌شود، از يك نقطه می‌گذرند؛ (۲) در هر چهار ضلعی محیطی، دو قطر و دو خط راستی که نقطه‌های تماس ضلع‌های مقابل را به هم وصل

می‌کند، از يك نقطه می‌گذرند؛ ۳) در هر مثلث محیطی، سه خط راستی که هر اس مثلث را به نقطه تماس ضلع مقابل وصل می‌کنند، از يك نقطه می‌گذرند.

از شیتز

۲۱۷. ثابت کنید، اگر محل برخورد دو قطر يك دوزنقه را به محل برخورد دو ضلع ناموازی آن وصل کنیم، خط راستی به دست می‌آید که قاعده بزرگتر را نصف می‌کند.

۲۱۸. می‌خواهیم از نقطه M ، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم، به شرطی که نقطه M بر خط راست AB واقع نباشد و پاره خط راست AB ، قطری از يك دایره ثابت باشد.

۲۱۹. ثابت کنید، مساحت هر مثلث متساوی الساقین، همیشه کوچکتر است از مساحت مثلثی که همان قاعده را داشته باشد و مجموع دو ضلع دیگرش، با مجموع دو ساق مثلث متساوی الساقین، برابر باشد.

از شتورم

۲۲۰. پیک از نقطه A حرکت کرد. روز اول ۱۰ «لیو» رفت و در روزهای بعد، هر روز $\frac{1}{3}$ «لیو» بیش از روز پیش. بعد از سه روز، پیک دیگری از شهر B ، که در ۴۶ «لیوئی» A قرار دارد، در همان جهت به راه افتاد. ضمناً، روز اول ۷ «لیو» و روزهای بعد هر روز $\frac{2}{3}$ «لیو» بیش از روز پیش حرکت می‌کرد. چند روز بعد از حرکت پیک اول، دو پیک به هم می‌رسند؟

از کاتالان

۲۲۱. از نقطه M ، واقع در بیرون دایره، قاطعی نسبت به دایره چنان رسم کنید که، به وسیله دایره، به دو قسمت برابر تقسیم شود.

مسأله پیشنهادی به هانری مونده

۲۲۲. در ذهن خود، دو عدد طوری پیدا کنید که تفاضل مجذورهای آنها، برابر ۱۲۳ باشد.

۲۲۳. نقطه‌ای روی قاعده مثلث انتخاب و، آن را، به‌راس مقابل وصل کرده‌ایم (که از این به بعد، آن را، پاره‌خط درونی می‌نامیم). ثابت کنید حاصل ضرب مجذور يك ضلع مثلث در قطعه غیر مجاور خود روی قاعده، به اضافه حاصل ضرب مجذور ضلع دیگر مثلث در قطعه غیر مجاور خود روی قاعده، منهای حاصل ضرب مجذور پاره‌خط درونی در قاعده، برابر است با حاصل ضرب قاعده در دو قطعه‌ای از قاعده که به وسیله پاره‌خط درونی پدید آمده‌اند.

فصل دوم

حل مسأله‌ها

و

یادداشت‌های تاریخی

۱. بابل قدیم

یادداشت تاریخی

پیدایش ریاضیات را، در بابل باستانی، باید مربوط به دهها سده پیش از میلاد دانست. خاطره کار بابلی‌ها، به صورت لوح‌های پخته گلی، با نوشته‌هایی به خط میخی، در بسیاری از موزه‌های معروف جهان، مثل موزه بریتانیا در لندن، موزه ارمیتاژ در لنین گراد، موزه هنرها در مسکو و غیره، نگهداری شده است. از فرهنگ ریاضی بابل قدیم، چهل و شش لوح پیدا شده است. در این لوح‌ها، روش‌های کاملاً ساده‌ای برای حل مساله‌های عملی (مربوط به تقسیم زمین، ساختمان و بازرگانی) داده شده است.

موفقیت‌های علمی مردم باستانی سرزمین بابل را می‌توان، به این ترتیب، خلاصه کرد:

الف) بابلی‌ها را باید پایه گذار اخترشناسی دانست. آنچه آن‌ها در مورد دستگاه سیاره‌ها به دست آورده بودند، بسیار دقیق بود. مثلاً، ماه قمری بابلی، با آن چه امروز در اخترشناسی معاصر محاسبه شده است، تنها $0/2$ ثانیه اختلاف دارد.

ب) بابلی‌ها، دستگاه عدد نویسی شصت شصتی را ساختند. مبنای این عدد نویسی، عدد ۶۰ بود (به جای ۱۰، که مبنای عدد شماری دهدهی است). دستگاه‌های اندازه‌گیری و توزین آن‌ها، به نحوی بود که هر واحد بزرگتر ۶۰ برابر واحد کوچکتر در نظر گرفته می‌شد، واحدهای شصت شصتی امروز، در اندازه‌گیری زمان (ساعت = ۶۰ دقیقه، دقیقه = ۶۰ ثانیه، ...)

و در اندازه گیری زاویه ها و کمان های دایره (محیط دایره = 360° درجه، درجه = 60 دقیقه و غیره)، براساس همین دستگاه عدد نویسی شصت شصتی بابلی ها است. بابلی ها، عدد نویسی موضعی را بنیان گذاشتند (درست شبیه عددنویسی امروزی که، مقدار هر رقم بسته به مرتبه یا موضعی که اشغال کرده است، معین می شود) و در مرحله ای از تاریخ خود، نماد صفر (یعنی، علامتی برای مرتبه های خالی) را کشف کردند.

پ) بابلی ها، معادله درجه دوم و بعضی از حالت های معادله درجه سوم و، همچنین، رشته ها را، به کمک جدول های خاص، حل می کردند. نشانه های زیادی درست است که ریاضیات بابلی ها، در فرهنگ ریاضی ملت های ماوراء قفقاز، به خصوص در فرهنگ ریاضیات ارمنی تاثیر داشته موجب شکوفائی آن شده است.

حل مساله ها

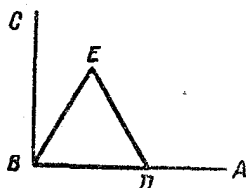
۱. طول ضلع شش ضلعی محاط در دایره، برابر است با طول شعاع دایره و، بنابراین

$$2\pi R = 6R$$

و از آن جا

$$\pi = \frac{6R}{2R} = 3$$

۲. بابلی ها می توانستند مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنند و، به کمک آن، زاویه قائمه را به سه بخش برابر تقسیم کنند. زاویه قائمه



شکل ۴

ABC را در نظر بگیرید (شکل ۴). مثلث متساوی الاضلاع BED را روی پاره خط BD از ضلع BA رسم می کنیم. در این صورت؛ زاویه CBE، برابر با یک سوم زاویه قائمه خواهد شد. تنها این می ماند که زاویه EBD را نصف کنیم، تا مساله به طور کامل حل شود.

۳. بنابراین با بلی‌ها، مساحت يك چهارضلعی برابر است با

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$$

که در آن، a و b طول‌های دو ضلع روبه‌رو، و c و d طول‌های دو ضلع دیگر روبه‌رو، در چهار ضلعی‌اند. این رابطه، تنها در مورد مستطیل دقیق است، زیرا در مورد مستطیل داریم:

$$a=b, \quad c=d \quad \text{و} \quad S=a.c$$

دستور بایلی‌ها، برای محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الساقین، در واقع، همان دستور محاسبه مساحت چهار ضلعی است، منتهی در این‌جا، طول یکی از ضلع‌ها برابر صفر است.

۲. مساله‌های مصری

یادداشت تاریخی

بعد از بابل، مصر را باید دومین مرکز فرهنگی دنیای کهن دانست. در این «کشور هرم‌ها»، ساختمان‌های عظیمی به صورت معبد‌ها و هرم‌ها ساخته شده است که قدمت آن‌ها، به هزاران سال پیش از میلاد می‌رسد. بعضی از این یادگارها، تا روزگار ما هم باقی مانده‌اند. کارهای مختلف ساختمانی و پیشرفت کشاورزی، که براساس آبیاری مصنوعی بود، نیاز به آگاهی‌های ریاضی و به خصوص هندسه را، به وجود آورد.

مصری‌ها، قاعده‌های ریاضی را، که برای کشاورزی و اخترشناسی و کارهای ساختمانی لازم داشتند، بر دیوار معبد‌ها و یا بر «پاپیروس‌ها» نوشته‌اند. پاپیروس، به طوماری نوار مانند گویند که از گیاه خاصی به همین نام تهیه می‌شد و برای نوشتن (به جای کاغذ) به کار می‌رفت.

در موزه بریتانیا، پاپیروسی وجود دارد که آن را پاپیروس ریند نامیده‌اند و در سال ۱۸۷۷، به وسیله پرفسور ایزنلور کشف رمز شد. این پاپیروس مربوط به حدود ۱۷۰۰ تا ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد است و در آن ۸۴ مساله وجود دارد که بیشتر خصلت حسابی دارند.

پاپیروس مسکو، مربوط به سال ۱۸۵۰ پیش از میلاد است. این پاپیروس، در سال ۱۸۹۳، به وسیله گولنه نیشچو، کلکسیونر روسی خریداری شد و از سال ۱۹۱۲، به مالکیت موزه هنرهای زیبای مسکو درآمد. این سند نادر و پرارزش دنیای کهن به وسیله «و.آ. توراپوف» و «و.و. ستروو» دانشمندان

شوروی مورد مطالعه قرار گرفت.

در این پایپروس، مساله‌هایی دربارهٔ محاسبهٔ حجم هرم ناقص مربع القاعده، حل شده است. به کمک پایپروس‌ها و مدرک‌های دیگری که به دست آمده است، روشن می‌شود که، مصری‌ها حتی در چهار هزار سال پیش می‌توانستند مساله‌های عملی دربارهٔ حساب، جبر و هندسه را حل کنند. ضمناً، در حساب، نه تنها از عددهای درست بلکه از عددهای کسری هم، استفاده می‌کردند.

حل مساله‌ها

۴. حل مساله، به حل این معادله منجر می‌شود:

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$$

و از آن جا به دست می‌آید: $x = 9$.

۵. در این جا، با پنج جمله از یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۷،

سر و کار داریم:

$$7, 49, 343, 2401, 16807$$

که مجموع آن‌ها، چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{a_5 \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{16807 \times 7 - 7}{7 - 1} = \frac{7(16807 - 1)}{6} = \\ &= \frac{7 \times 16806}{6} = 7 \times 2801 = 19607 \end{aligned}$$

۶. بنابر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

و از آنجا

$$\pi = \frac{8^2 \cdot d^2 \cdot 4}{9^2 \cdot d^2} = \frac{256}{81} = 3\frac{1}{6}$$

۷. بنابر روش مصری داریم:

$$S_1 = \frac{1}{2}a \cdot b$$

که در آن، a طول قاعده و b طول ساق مثلث متساوی الساقین است. ارتفاع مثلث را h می گیریم، داریم:

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = b \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}$$

در نتیجه، مقدار دقیق مساحت مثلث، چنین می شود:

$$S_2 = \frac{1}{2} a \cdot b \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = S_1 \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}$$

و از آن جا

$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{2 \times 10}\right)^2} = 0.98$$

یعنی، مقدار اشتباه، بیشتر از ۲٪ نیست.

۸. بنابراین روش مصری داریم:

$$S_1 = \frac{a+b}{2} \cdot c$$

که در آن، a و b به ترتیب قاعده های پایین و بالای دوزنقه، و c طول ساق آن است. اگر ارتفاع دوزنقه را با h نشان دهیم، به دست می آید:

$$h = c \sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}$$

و مقدار درست مساحت دوزنقه، چنین می شود:

$$S_2 = S_1 \sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}$$

از آن جا

$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}$$

اکنون باید مقدارهای عددی را قرار داد و، با محاسبه های مقدماتی، نتیجه را به دست آورد.

۹. اگر حجم هرم ناقص را V بگیریم، با این دستور محاسبه می شود:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

که در آن، h طول ارتفاع و a و b ، به ترتیب، مقدار مساحت قاعده‌های پایین و بالا هستند.

۱۰. طول ضلع‌های مجهول را x و y می‌گیریم. حل مساله، منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \quad x \cdot y = S$$

که اگر دو معادله را درهم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x^2 = \frac{m}{n} \cdot S \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{n} \cdot S}$$

و از آنجا

$$y = \frac{n}{m} \sqrt{\frac{m}{n} \cdot S} = \sqrt{\frac{n}{m} \cdot S}$$

۱۱. جواب عبارت است از $۱۷۲\frac{۲۱}{۳۳}$. در پاپیروس، قسمت کسری

جواب، یعنی $\frac{۲۱}{۳۳}$ ، به صورت مجموع کسرهایی داده شده است که صورت همه

آن‌ها واحد است، یعنی

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{۴۸} + \frac{1}{۹۶}$$

۳. مساله‌های یونانی

یادداشت تاریخی

نخستین معلمان یونانی‌های باستان، مصری‌ها بودند. در سده هفتم پیش از میلاد، راه ورود آزاد به مصر، برای مسافران خارجی باز شد. دانشمندان یونانی، از این امکان، به خوبی و با سربزه «سرزمین هرم‌ها» استفاده کردند. یونانی‌ها، تقریباً از سده چهارم پیش از میلاد، جست‌وجوهای مستقل خود را در ریاضیات آغاز کردند و، در این زمینه، به خصوص در هندسه، به موفقیت‌های زیادی دست یافتند. هندسه یونان باستان، در سده سوم پیش از میلاد، به اوج خود رسید. در این سده بود که اقلیدس، سیزده کتاب خود را، زیر نام «مقدمات»، درباره هندسه نوشت.

در نوشته‌های اقلیدس، جنبه منطقی هندسه، در چنان سطح بالایی قرار داشت که تنها در سده‌های نوزدهم و بیستم، در کارهای هیلبرت ریاضی‌دان آلمانی و مکتب او، تلاشی برای بهتر کردن آن‌ها انجام گرفت. یونانی‌ها، تنها به مساله‌های هندسه مقدماتی علاقه‌مند نبودند (ضمناً، اصطلاح هندسه مقدماتی، در آن زمان، وجود نداشت)، بلکه مبانی استواری هم، برای هندسه عالی، پی‌ریختند (کارهای آپولونیوس، ارشمیدس و دیگران). در نظریه عددها، فیثاغورث و شاگردان او، موفقیت‌های جدی به دست آوردند.

در زمینه جبر، به خصوص معادله‌های سیال، باید از «دیوفانت» نام

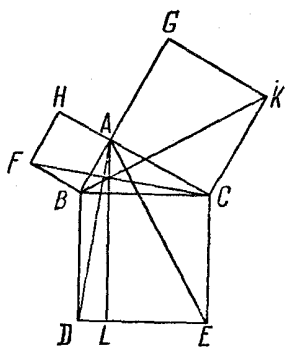
برد که در سده های دوم و سوم میلادی، در اسکندریه می زیست و، به همین مناسبت، گاهی او را دیوفانت اسکندرانی می نامند. او، برای نخستین بار، در روش های جبری خود، نخستین نمادهای حرفی را وارد کرد و معادله های جبری را به کمک علامت ها نشان داد.

مهم ترین تالیف دیوفانت، «حساب» اوست، که درش کتاب به ما رسیده است (و احتمال می دهند که در اصل، ۱۳ کتاب بوده است). از روی همین کتاب دیوفانت، می توان درباره موفقیت جبر در یونان باستان داوری کرد.

حل مساله ها

۱۲. این قضیه، به قضیه فیثاغورث مشهور شده است و در هر کتاب هندسه مقدماتی، به عنوان یکی از اساسی ترین قضیه ها، آمده است. تقریباً در همه کتاب های درسی هندسه، که برای دبیرستان ها نوشته شده است، قضیه فیثاغورث با اثبات اقلیدس داده شده است. با وجودی که اثبات اقلیدس، با بیان دقیق شوپنهاور، از نوع «اثبات تله موشی» است، به کلی فاقد عینیت است و باید، با استدلال های پیچیده ای، کورکورانه به دنبال اقلیدس رفت. بنابه اعتقاد پرفسور و. لیتمان، اگر در چهار چوب دستگاه هندسی مورد بررسی قرار گیرد، اثباتی را که اقلیدس در «مقدمات» خود داده است، می توان به عنوان طرح ساده ای قبول کرد. در واقع، عینی بودن مطالب، هدف اصلی اقلیدس نیست و آن را در ردیف اول اهمیت قرار نمی دهد. برای اقلیدس، بهترین اثبات این است که حداقل استفاده را، از قضیه های قبلی، کرده باشد. از این دیدگاه، اثباتی که اقلیدس از قضیه فیثاغورث داده است، اثباتی ساده است. اقلیدس، برای اثبات این قضیه، یک بار از قضیه مربوط به حالت اول تساوی مثلث ها و دوبار از این قضیه استفاده می کند که: اگر یک متوازی الاضلاع و یک مثلث، دارای قاعده ها و ارتفاع های برابر باشند، مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث است.

مادر این جا، اثبات قضیه فیثاغورث را، آن طور که اقلیدس در «مقدمات» خود داده است (حکم ۴۷)، می آوریم. ضمناً، این اثبات، به گواهی پروکλος (۴۱۰ - ۴۸۵ میلادی)، متعلق به خود اقلیدس است.



شکل ۵

«فرض کنید، ABC مثلث

قائم الزاویه‌ای با زاویه قائمه BAC باشد. من حکم می‌کنم که مربع روی BC برابر است با مربع‌های روی BA و AC روی هم (شکل ۵).

اثبات. مربع $BDEC$ را روی BC و مربع‌های HB و GC را، به ترتیب، روی BA و AC می‌سازیم (حکم ۴۶). از نقطه A ، خط راست

AL را موازی BD و CE می‌کشیم (حکم ۳۱)؛ AD و FC را وصل می‌کنیم. چون هر کدام از زاویه‌های ABC و BAH قائمه‌اند (تعریف ۱۰)، یعنی از نقطه A روی خطی مثل BA ، دو خط راست AC و AH را در دو جهت طوری رسم کرده‌ایم که زاویه‌های مجانبی به مجموع دو قائمه تشکیل داده‌اند، در نتیجه، CA روی همان خط راست CH قرار دارد (حکم ۱۴). به همین ترتیب، AB هم در امتداد AG قرار می‌گیرد. و چون زاویه DBC با زاویه FBA برابر است (اصل ۱)، زیرا هر کدام از آن‌ها قائمه‌اند، اگر زاویه مشترک ABC را اضافه کنیم، به معنای این می‌شود که زاویه DBA با زاویه FBC برابر است (اصل ۲)، زیرا اگر به دو مقدار برابر، یک مقدار اضافه کنیم، دو مقدار برابر به دست می‌آید. چون DB برابر BC و FB برابر BA است (تعریف ۲۲)، پس دو ضلع DB و BA ، نظیر به نظیر، با دو ضلع BC و FB برابرند، و زاویه DBA با زاویه FBC برابر است؛ یعنی قاعده AD با قاعده FC و مثلث ABD با مثلث FBC برابر می‌شود (حکم ۴). دوبرابر مثلث ABD ، متوازی الاضلاع BL است (حکم ۴۱)، زیرا آن‌ها در قاعده BD مشترک‌اند و بین دو خط موازی BD و AL قرار گرفته‌اند (حکم ۴۱). دوبرابر مثلث FBC هم (حکم ۴۱)، مربع HB می‌شود، زیرا قاعده هر دوی آن‌ها FB است و بین دو خط موازی FB و HC قرار دارند. ولی دو برابر دو مقدار برابر، با هم برابرند (اصل ۵)؛ یعنی مستطیل BL با مربع HB

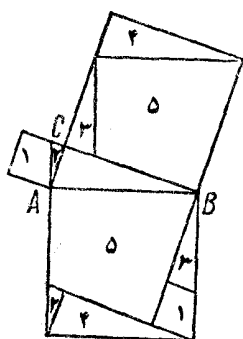
برابر می شود. به همین ترتیب، با وصل AE و BK، ثابت می شود که مستطیل CL برابر است با مربع GC؛ یعنی تمامی مربع BDEC برابر است با دو مربع HB و GC روی هم. اما BDEC، مربعی است که روی BC ساخته شده است و HB و GC، مربع های روی BA و AC. به این ترتیب، مربع روی ضلع BC برابر است با مجموع مربع های روی ضلع های BA و AC.

یعنی، در مثلث قائم الزاویه، مربع روی ضلع مقابل به زاویه قائمه (وتر)، برابر است با مجموع مربع های روی ضلع های پهلوی زاویه قائمه. و این، همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم».

اثبات از این نظر جالب است که به وسیله اقلیدس، و در بیش از دوهزار سال پیش، داده شده است و با اثبات امروزی آن، تفاوت ناچیزی دارد.

در ادبیات درسی ریاضی، اثبات های فراوانی از قضیه فیثاغورث وجود

دارد، که براساس شکل های هم ارز قرار دارند. تفاوت اصلی این اثبات ها، با اثبات اقلیدس، در عینی بودن آنها است، ولی از لحاظ سادگی، به مفهومی که قبلاً گفتیم، از اثبات اقلیدس پایین ترند. مثلاً، در سده نهم میلادی، آناریتسی، اثبات خودش را براساس شکل ۶ قرارداد.



شکل ۶

قضیه فیثاغورث، تاریخی غنی

دارد. ضمناً روشن شده است که

مصری ها، بابلی ها، چینی ها و هندی ها، مدت ها پیش از فیثاغورث، از این قضیه آگاهی داشته اند.

هندی ها، از سده هفتم پیش از میلاد، زیر نام «قاعده طناب ها»، با قضیه فیثاغورث آشنا بودند و از آن، در ساختن محراب های خود استفاده می کردند. بنابراین محراب های هندی ها، این محراب ها می بایستی شکل دقیق هندسی داشته باشند و نسبت به چهار جهت اصلی، توجیه شده باشند.

اثبات خود فیثاغورث به‌ما نرسیده است. در زمان ما، بیش از صد اثبات مختلف، برای قضیه فیثاغورث وجود دارد. چه بسا که یکی از آن‌ها، متعلق به فیثاغورث و یا یکی از شاگردان او باشد (بنابه عادت آن روزگار، هر چیزی را که شاگردان کشف می‌کردند، به نام معلم خود ثبت می‌کردند).

*

فیثاغورث (حدود سال‌های ۵۸۰ تا ۵۰۰ پیش از میلاد)، ریاضی‌دان و فیلسوف یونان باستان، در ساموس متولد شد. در جوانی، برای مطالعه دانش کاهنان مصری، به آن سرزمین سفر کرد. او در بابل هم بود و، در آن‌جا، در جریان ۱۲ سال، توانست اخترشماری (تنجیم) و اخترشناسی (نجوم) کاهنان بابلی را فرا گیرد. بعد از بابل، به جنوب ایتالیا و، سپس، به سیسیل رفت و در آن‌جا مکتب فیثاغوری را بنیان گذاشت که سهم پرارزشی در پیشرفت ریاضیات و اخترشناسی داشت. فیثاغورث و شاگردان او، به‌هندسه، چهره علمی دادند. به‌جز قضیه‌ای که به نام او مشهور است، اثبات قضیه مربوط به مجموع زاویه‌های مثلث، مسأله مربوط به پوشش‌ها- یعنی تقسیم صفحه به چند ضلعی‌های منتظم-، حل هندسی معادله درجه دوم و طریق ساختن شکلی که با شکل مفروض متشابه و با شکل مفروض دیگر هم‌ارز باشد، نیز به فیثاغورث منسوب است.

در مکتب فیثاغوری، عرفان عددی رشد زیادی کرد. قبول نسبت‌های کمی، به عنوان ماهیت همه چیزها، و جدا شدن از واقعیت‌های عینی و مادی، این مکتب را به سمت ذهن‌گرایی سوق داد. فیثاغورث می‌آموخت که، معیار هر چیز مادی و غیرمادی، عبارت است از عدد و بستگی‌هایی که بین عددها وجود دارد. به اعتقاد فیثاغورث، حتی مفهوم‌های به کلی دور از ریاضیات را، همچون «دوستی»، «درستی»، «شادی» و غیره، می‌توان به یاری بستگی‌های عددی روشن کرد. او معتقد بود که، این مفهوم‌ها، چیزی جز شکل و یا نمونه این بستگی‌ها نیستند. به یاری عدد می‌توان همه خصلت‌های پنهانی را روشن کرد: عددی نماینده نیکی، دیگری معرف بدی و سومی مظهر کامیابی است و غیره. فیثاغورث اعتقاد داشت که روح هم چیزی جز عدد نیست، جاودان

است و از يك انسان به انساني ديگر منتقل مي شود.

عرفان عددي فيثاغورث و دنبال كنندگان راه او، لطمه هاي زيادي به پيشرفت دانش رياضي وارد آورد.

۱۳. قبلاً ياد آوري مي كنيم كه، اگر x_1 ، y_1 و z_1 ، يك سه تايي فيثاغوري باشد، عددهاي kx_1 ، ky_1 و kz_1 هم، يك سه تايي فيثاغوري را تشكيل مي دهند (k ، عددي است درست و مثبت). در واقع، اگر دو طرف معادله

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$$

را در k^2 ضرب كنيم، به دست مي آيد:

$$(kx_1)^2 + (ky_1)^2 = (kz_1)^2$$

بنابراين، اگر يك سه تايي فيثاغوري در اختيار داشته باشيم، مي توان با استفاده از ياد آوري بالا، مجموعه اي نامتناهي از سه تايي هاي فيثاغوري را به دست آورد. ولي البته، اين مطلب به معنای آن نيست كه، از اين راه همه سه تايي هاي فيثاغوري به دست مي آيد. براي پيدا كردن اين سه تايي ها، به استدلال بيش تري نياز داريم.

سه تايي هاي فيثاغوري x ، y و z را وقتي ساده مي ناميم، دو به دو نسبت به هم اول باشند. در غير اين صورت، به آن «سه تايي مركب» مي گوييم. به خودي خود روشن است كه، براي به دست آوردن همه سه تايي هاي فيثاغوري، بايد مجموعه همه سه تايي هاي ساده را شناخت تا از راه ضرب آن ها در عددهاي مثبت ۲، ۳، ... بتوان همه سه تايي هاي ديگر را پيدا كرد. از اين به بعد، تنها با سه تايي هاي ساده سرو كار خواهيم داشت.

سپس، توجه كنيم كه، اگر از سه عدد فيثاغوري x ، y و z ، دو تايي آن ها نسبت به هم اول باشند، سه تايي (x, y, z) يك سه تايي ساده مي شود، يعني هر دو عدد دلخواه آن، نسبت به هم، اول خواهند بود. اين حكم را ثابت مي كنيم.

x و y را نسبت به هم اول مي گيريم. ثابت مي كنيم كه x و z و، همچنين، y و z نسبت به هم اول اند. از برهان خلف استفاده مي كنيم. فرض

می‌کنیم، x و z نسبت به هم اول نباشند (هر استدلالی که برای x و z به کار بریم، در مورد دو عدد y و z هم صادق است). در این صورت داریم:

$$x = d \cdot x_1, \quad z = d \cdot z_1$$

که در آن، $d \neq 1$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد x و z است. هر سه تایی فیثاغوری در این معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

بنابراین

$$(dx_1)^2 + y^2 = (dz_1)^2$$

که از آن جا، به دست می‌آید:

$$y^2 = d^2 z_1^2 - d^2 x_1^2 = (z_1^2 - x_1^2) d^2$$

از این جا دیده می‌شود که عدد y ، به ناچار، باید بر d بخش پذیر باشد و، در این صورت، دو عدد x و y ، برخلاف فرض، نسبت به هم اول نمی‌شوند. در نتیجه، x و z نسبت به هم اول اند. و به همین ترتیب، در مورد دو عدد y و z ، از آن جا که x و y نسبت به هم اول اند، هر دو ی آن‌ها نمی‌توانند زوج باشند. ولی این دو عدد، هر دو، فرد هم نمی‌توانند باشند. در واقع، اگر هر دو عدد فرد باشند، می‌توانیم آن‌ها را به صورت $x = 2p + 1$ و $y = 2q + 1$ بنویسیم، که در آن‌ها، p و q عددهایی درست و مثبت اند. اگر مقادیرهای x و y را در معادله (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = z^2,$$

$$z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2$$

از این جا، z^2 عددی زوج می‌شود. و این ممکن نیست، مگر آن که z عددی زوج باشد. ولی اگر z عددی زوج باشد، z^2 باید بر ۴ بخش پذیر شود، در حالی که از مقدار z^2 دیده می‌شود که در تقسیم بر ۴، به باقی مانده ۲ می‌رسد، و این، يك تناقض منطقی است.

به این ترتیب، x و y نمی‌توانند هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، یعنی حتماً یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است. از این به بعد، x را فرد و y را زوج می‌گیریم. روشن است که z عددی فرد می‌شود. حالا، معادله (۱) را،

به این صورت می نویسیم:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$$

و فرض می کنیم:

$$z+y=m, \quad z-y=n$$

در این صورت

$$z = \frac{m+n}{2}, \quad y = \frac{m-n}{2}, \quad x^2 = m \cdot n$$

و ضمناً $m > n$.

چون x ، و در نتیجه x^2 ، عددی فرد است، بنابراین هر دو عدد m و n باید فرد باشند. ثابت می کنیم که m و n نسبت به هم اول اند. استدلال را، با برهان خلف انجام دهیم. m و n را عددهایی می گیریم که نسبت به هم اول نیستند و بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها را $d \neq 1$ فرض می کنیم. در این صورت

$$m = m_1 d, \quad n = n_1 d$$

و از آن جا

$$z = \frac{m+n}{2} = \frac{m_1+n_1}{2} d, \quad y = \frac{m-n}{2} = \frac{m_1-n_1}{2} d$$

یعنی y و z نسبت به هم اول نیستند، چیزی که مخالف فرض ما است. به این ترتیب، عددهای m و n ، نسبت به هم اول اند. از رابطه $x^2 = mn$ و از این حکم که m و n نسبت به هم اول اند، نتیجه می شود:

$$m = u^2, \quad n = v^2$$

که در آن ها، u و v نسبت به هم اول اند و، ضمناً $u > v$.
به این ترتیب، سرانجام، به دست می آید:

$$x = u \cdot v, \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

و این ها، همان رابطه هایی هستند که سه تایی های ساده فیثاغوری را به دست می دهند (مستقیماً تحقیق کنید و ببینید که این مقادارها، در معادله (۱) صدق

می کنند).

برای این که مطلب روشن تر باشد، چند سه تایی ساده فیثاغوری را، به یاری این رابطه ها، پیدا می کنیم:

u	v	x	y	z
۳	۱	۳	۴	۵
۵	۱	۵	۱۲	۱۳
۵	۳	۱۵	۸	۱۷
۷	۱	۷	۲۴	۲۵
۷	۳	۲۱	۲۰	۲۹
۷	۵	۳۵	۱۲	۳۷
۹	۱	۹	۴۰	۴۱
۹	۵	۴۵	۱۸	۵۳
۹	۷	۶۳	۱۶	۶۵

یادداشت ۱. سه تایی های فیثاغوری ۳، ۴، ۵، خیلی پیش از فیثاغورث، برای مصری ها شناخته بوده است و از آن، برای رسم خط های عمود برهم بر روی زمین، استفاده می کرده اند. به همین مناسبت است که مثلث با ضلع های ۳، ۴ و ۵ را مثلث مصری گویند.

یادداشت ۲. با عددهای فیثاغوری، می توانیم، هر قدر که بخواهیم، مثلث هرونی بسازیم. مثلث هرونی، به مثلی گویند که سه ضلع و مساحت آن، با عددهای درست و مثبت بیان شده باشند. در واقع، هر سه تایی فیثاغوری، متناظر با يك مثلث قائم الزاویه است که وتر و ضلع های پهلوی زاویه قائمه

آن، با این عددها، بیان شده‌اند. اگر دومثلث فیثاغوری در نظر بگیریم که در یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه برابر باشند، و آن وقت، این دوضلع برابر را طوری روی هم قرار دهیم که دوضلع دیگر پهلوی زاویه قائمه، از دومثلث، در امتداد هم قرار گیرند، يك مثلث هرونی به دست می‌آید. مثلاً، از دومثلث فیثاغوری با ضلع‌های ۱۳، ۱۲، ۵ و ۳۷، ۱۲، ۳۵، يك مثلث هرونی با ضلع‌های ۱۳، ۴۵ و ۳۷ به دست می‌آید که ارتفاعی برابر ۱۲ دارد و، بنابراین، مساحتش برابر $\frac{40 \times 12}{2}$ ، یعنی ۲۴۰ واحد مربع می‌شود.

یادداشت ۳. وجود مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تایی‌های فیثاغوری، وسیله‌ای است برای درست کردن مسأله‌هایی بسیار جالب. ریاضی‌دانان، به‌خصوص به این سه مسأله علاقه‌مندند:

مسأله اول. از میان سه‌تایی‌های فیثاغوری، همه آن‌هایی را پیدا کنید که، در هر کدام از آن‌ها، يك مجذور کامل وجود داشته باشد (مثل سه‌تایی ۵، ۴، ۳ یا ۲۵، ۲۴، ۷ یا ۴۱، ۴۰، ۹ و غیره).

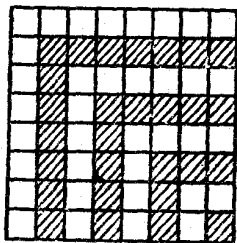
مسأله دوم. از بین سه‌تایی‌های فیثاغوری، همه آن‌هایی را پیدا کنید که، در هر کدام از آن‌ها، دو عدد متوالی وجود داشته باشد (مثل ۱۳، ۱۲، ۵ یا ۲۹، ۲۱، ۲۰ و غیره).

مسأله سوم (مسأله فرما). سه‌تایی‌های فیثاغوری (x, y, z) را طوری پیدا کنید که، در آن‌ها، $x+y$ و z مجذور کامل باشند. معلوم شده است که این گونه سه‌تایی‌ها، يك مجموعه نامتناهی را تشکیل

می‌دهند، ولی همه آن‌ها، شامل عددهایی بسیار بزرگ‌اند.

۱۴. ظاهر آ، در مکتب فیثاغوری

این مسأله را به طریق هندسی حل می‌کرده‌اند. در شکل ۷، اثبات مسأله، به سادگی دیده می‌شود. ۱ رابه صورت مربعی نشان می‌دهیم و بعد، عددهای فرد متوالی، به شکل Γ در می‌آیند، و



شکل ۷

از روی شکل دیده می شود که

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

.....

حل این مسأله، باروش جبری هم، خیلی ساده است. عددهای فرد متوالی، با شروع از ۱، يك تصاعد حسابی تشکیل می دهند:

$$1, 3, 5, 7, \dots, (2n+1)$$

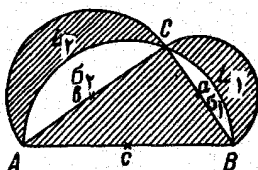
تعداد جمله های این تصاعد برابر است با $(n+1)$. مجموع همه جمله های این تصاعد چنین می شود:

$$S = \frac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2$$

۱۵. فیثاغوریان، این مسأله را به طریق هندسی حل می کردند. اگر در شکل ۷ (که يك مربع است)، بزرگترین علامت Γ را (که يك عدد فرد است) برداریم، بازهم يك مربع باقی می ماند، یعنی

$$2n+1 = (n+1)^2 - n^2$$

۱۶. مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر می گیریم، که a و b ، طول



شکل ۸

ضلع های پهلوی زاویه قائمه و C ، طول وتر آن باشد. نیم دایره هایی به قطر ضلع های مثلث رسم می کنیم (شکل ۸). برای روشن تر بودن شکل، مثلث ABC و هلال های L_1 و L_2 را هاشور زده ایم. باید ثابت کرد که،

مجموع مساحت های L_1 و L_2 ، برابر است با مساحت مثلث ABC . بنابر قضیه فیثاغورث داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

یا

برسد، به نحوی که EJ برابر با BE باشد. روی AJ، مربع JG را می‌سازیم و HG را تا نقطه K امتداد می‌دهیم. من حکم می‌کنم که AB در نقطه G، طوری تقسیم شده است که مستطیل حاصل از AB و BG، برابر است با مربعی که روی ضلع AG ساخته می‌شود».

مسأله اقلیدس، که نام «تقسیم طلایی» یا «تقسیم به ذات وسط و طرفین» را بر خود دارد، در کتاب‌های درسی امروز، این‌طور تنظیم شده است: پاره‌خط مفروض را به دو قسمت نابرابر طوری تقسیم کنید که قسمت بزرگ‌تر، واسطه هندسی بین تمام پاره‌خط و قسمت کوچک‌تر باشد.

طول پاره‌خط را a و طول قسمت بزرگ‌تر را x می‌گیریم. در نتیجه، طول قسمت کوچک‌تر برابر $a - x$ می‌شود (روی شکل ۱۳ داریم: $AB = a$ ، $AG = x$ و $GB = a - x$). در این صورت، x از این معادله به دست می‌آید:

$$x^2 = a(a - x) \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

که با حل آن، مقدار x چنین می‌شود:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

شرط مسأله، تنها در جواب اول صدق می‌کند. بنابراین

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

که در آن داریم: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\dots$ (کسری نامتناهی و نامتناوب).

بنابراین: $x \approx 0.62a$.

تقسیم طلایی، به‌طور آگاهانه، در ساختمان‌های مذهبی و در مجسمه‌سازی، مورد استفاده خود را پیدا کرده است. به‌خصوص، در یونان باستان، ضمن ساختن بناهای تاریخی، به «تقسیم طلایی» توجه بسیار داشتند.

۴۴. ابتدا ثابت می‌کنیم که، هر عدد درست مثبت، یا واحد است یا عددی است اول و یا می‌تواند به صورت ضرب عددهای اول تجزیه شود.

حکم، برای عدد ۱ درست است. فرض می‌کنیم، این حکم، برای عددهای درست و مثبتی که از n تجاوز نمی‌کنند، درست باشد، ثابت می‌کنیم،

در این صورت، برای $n+1$ هم درست است.

اگر $n+1$ عددی اول باشد، خود به خود به معنای آن است که حکم، برای $n+1$ هم درست است. ولی، اگر $n+1$ عددی اول نباشد، به معنای آن است که عددی است مرکب و، بنابراین: $n_1 \cdot n_2 = n+1$. ضمناً، n_1 و n_2 عددهای درست مثبتی هستند که، هر کدام از آنها، از $n+1$ کوچکتر اند. طبق فرض، از آن جاکه n_1 و n_2 از n تجاوز نمی کنند، می توانند به ضرب عامل های اول تجزیه شوند، در نتیجه، $n+1$ هم قابل تجزیه به ضرب عامل های اول است.

به این ترتیب، هر عدد درست مثبت، غیر از واحد، یا عددی است اول و یا قابل تجزیه به ضرب عامل های اول.

حالا، به حل مسأله اقلیدس می پردازیم. اثبات را به طریق برهان خلف می دهیم. فرض می کنیم، عددهای اول، مجموعه ای متناهی را تشکیل دهند و مثلاً، شامل n عدد باشد:

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

این عددهای اول را در هم ضرب و یک واحد به حاصل ضرب اضافه می کنیم، به این عدد می رسم:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n + 1$$

این عدد از هر کدام از عددهای $p_1, p_2, \dots, p_n$ بزرگتر است و، بنابراین، عددی است غیر اول. ولی، بنا بر آنچه گفتیم، هر عدد غیر اول، قابل تجزیه به عامل های اول است، یعنی

$$p_1 \cdot p_2 \dots p_n + 1 = q_1 \cdot q_2 \dots q_n$$

که در آن $q_1, q_2, \dots, q_n$ ، عددهایی اول اند.

هیچ کدام از عددهای $q_1, q_2, \dots, q_n$ ، نمی توانند با یکی از عددهای اول $p_1, p_2, \dots, p_n$ برابر باشند، در واقع، اگر مثلاً داشته باشیم:

$$q_1 = p_k$$

$$q_1 q_2 \dots q_n - p_1 p_2 \dots p_n = 1$$

بر q_1 بخش پذیر باشد و، در نتیجه، سمت راست بر این عدد بخش پذیر شود، چیزی که ممکن نیست، زیرا واحد بر q_1 ($p_k \neq 1$) بخش پذیر

نیست، به این ترتیب، به جزعه‌های اول $p_1, p_2, \dots, p_n$ ؛ عددهای اول دیگری هم پیدا شد $(q_1, q_2, \dots, q_n)$. این تناقض، درستی حکم اقلیدس را ثابت می‌کند، یعنی عددهای اول، يك مجموعه نامتناهی را تشکیل می‌دهند. اولر، راه حل بکر و جالبی از مسأله اقلیدس دارد. ما ماهیت این استدلال را در این جا می‌آوریم (اثبات بازهم، با استفاده از برهان خلف است). فرض کنیم، مجموعه عددهای اول، مجموعه‌ای متناهی باشد. تعداد عددهای اول را n می‌گیریم و آن‌ها را $p_1, p_2, \dots, p_n$ فرض می‌کنیم. این تصاعدی هندسی را تشکیل می‌دهیم:

$$1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}},$$

$$1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}$$

.

$$1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots + \frac{1}{p_n^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$$

این رشته‌ها را در هم ضرب می‌کنیم (مثل مورد ضرب رشته‌های متقارب، می‌توان تعداد محدودی از جمله‌ها را در نظر گرفت)، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_3}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}$$

در مجموع سمت راست این برابری، همه ترکیب‌های مختلف و ممکن نمادهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارد. روشن است که هر عدد درست و مثبت m به ضرب توان‌هایی از عددهای اول قابل تجزیه است: $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ و ضمناً تنها به يك طریق (ثابت کنید). از آن جا

$$\sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} = \sum \frac{1}{m}$$

یعنی، مجموعی که درست چپ قرار دارد، شامل همه کسرهای به صورت $\frac{1}{m}$ ، به ازای هر عدد درست و مثبت m است، مجموعی را که درست راست برابری قرار دارد، می توان بر حسب ردیف تصاعدی مخرج ها نوشت:

$$\sum \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

به این ترتیب، به دست می آید:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \dots \frac{p_n}{p_n - 1}$$

حاصل ضربی که درست راست این برابری قرار دارد، بی نهایت نیست، زیرا عددهای $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، مجموعه ای متناهی را تشکیل می دهند. ولی

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

رشته توافقی است و، همان طور که می دانیم، رشته ای متباعد است. این تناقض منطقی، به معنای آن است که فرض نخستین ما، درباره محدود بودن تعداد عددهای اول، درست نیست و عددهای اول، مجموعه ای نامتناهی را تشکیل می دهند.

۰۴۳. راه حل خود آپولونیوس، برای این مساله، به ما نرسیده است، باوجود این، برخی از مؤلفان باستانی از آن یاد کرده اند. ظاهراً، برای این که آپولونیوس مساله را در حالت کلی حل کند، ابتدا حالت های خاص وحدی آن را، مورد بررسی قرار داده است:

- (۱) دایره ای رسم کنید که از سه نقطه مفروض بگذرد؛
- (۲) دایره ای رسم کنید که بر سه خط راست مفروض مماس باشد؛
- (۳) دایره ای رسم کنید که از نقطه مفروض بگذرد و بر دو خط راست موازی مفروض مماس باشد؛
- (۴) دایره ای رسم کنید که از نقطه مفروض بگذرد و بر دو خط راست مفروض متقاطع مماس باشد؛
- (۵) دایره ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و بر خط راست

مفروضی مماس باشد؛

۶) دایره‌ای رسم کنید که بردایره مفروضی مماس باشد و از دو نقطه مفروض بگذرد؛

۷) دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایره مفروضی که از يك نقطه می‌گذرند، مماس باشد.

بررسی نشان می‌دهد که، اگر مساله آپولونیوس، دارای تعداد محدودی جواب باشد، این تعداد از ۸ تجاوز نمی‌کند.

*

مولف این مساله، آپولونیوس برغه‌ای، یکی از مشهورترین دانشمندان یونانی در سده سوم پیش از میلاد است. کتاب او، شامل قسمت عمده‌ای از ادبیات ریاضی آن زمان است. با همه این‌ها، شهرت آپولونیوس به خاطر رساله‌ای است که در ۸ مقاله درباره مقطع‌های مخروطی نوشته است (یکی از این ۸ مقاله گم شده است).

۰۲۴. اگر ضلع مربع را برابر a بگیریم، شعاع دایره محاطی $r = \frac{a}{4}$ و

دایره محیطی $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ می‌شود. از آن‌جا، اگر مساحت دایره محاطی را s و مساحت دایره محیطی را S بگیریم، داریم:

$$s = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi a^2, \quad S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$$

و بنابراین: $S = 2s$.

*

مولف این مساله، ارشمیدس سیراکوزی (۲۸۸-۲۱۲ پیش از میلاد)، بزرگ‌ترین ریاضی‌دان و فیزیک‌دان همه زمان‌هاست. زندگی او، آمیخته به افسانه‌هاست. طبق این افسانه‌ها، او در جریان دوسال، به کمک ماشین‌هایی که اختراع کرده بود، قلب دفاع از سیراکوز را در برابر ارتش بزرگ روم - که از خشکی و دریا شهر را محاصره کرده بود - تشکیل می‌داد. او «پیچ ارشمیدس» و «اهرهای ارشمیدس» را اختراع و قانون هیدروستاتیک را - که

به «قانون ارشمیدس» مشهور است - کشف کرد.

ارشمیدس، در محاسبه‌های خود، از روشهایی استفاده می‌کرد که به روش‌های ریاضیات عالی امروزی - که بر اساس نظریه حدها، بنیان گذاری شده است - بسیار نزدیک است.

(مساله، از رساله «پیش قضیه‌ها» نوشته ارشمیدس، برداشته شده است.)

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2 (1.25)$$

$$\text{از آن جا } \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{11}{14} (2)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{11}{14} \Rightarrow \pi = \frac{44}{14} = \frac{22}{7}$$

به این ترتیب، مساحت دایره طبق محاسبه ارشمیدس، و شبیه محاسبه امروزی،

$$\frac{22}{7} r^2 \text{ برابر است با}$$

(این مساله، از رساله «اندازه گیری دایره»، متعلق به ارشمیدس، برداشته

شده است.)

۲۶. باتوجه به شکل ۱، داریم:

$$S_{AFDHC B} = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(AC^2 - AD^2 - DC^2) = \frac{\pi}{8}[(AD + DC)^2 - AD^2 - DC^2] =$$

$$= \frac{\pi}{8} \times 2AD \cdot DC = \frac{\pi}{4}BD^2 = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۷. مساحت قطاع کروی، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = 2\pi Rh$$

که در آن، R شعاع کره و h ارتفاع قطاع است.

اگر l، طول خط راستی باشد که راس قطاع را به یکی از نقطه‌های محیط

دایره قاعده وصل می‌کند، داریم: $l^2 = 2Rh$ و از آنجا

$$S = \pi l^2$$

(مساله، از رساله ارشمیدس، به نام «درباره کره و استوانه» برداشته شده است.)

۲۸. حجم کره برابر است با $\frac{4}{3}\pi R^3$ و حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

برای برابری این دو حجم، باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{r^2 h}{4}}$$

حجم استوانه، برابر است با $\pi r^2 h$. بنابراین، برای این که حجم کره برابر با حجم استوانه باشد، داریم:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{4}r^2 h}$$

(مساله، از رساله «درباره کره و استوانه» برداشته شده است.)

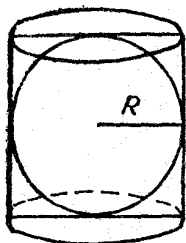
۲۹. با توجه به شرطهای مساله، برای حجم استوانه داریم (شکل ۱۴):

$$V_1 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right) = \frac{3}{4} V_2$$

V_1 را حجم استوانه و V_2 را حجم کره گرفته ایم.

به همین ترتیب، اگر سطح کل استوانه‌ای را S_1 و سطح کره را S_2 بگیریم، خواهیم داشت:

$$S_1 = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 = \frac{3}{4} (4\pi R^2) = \frac{3}{4} S_2$$



شکل ۱۴

مساله، از رساله «درباره کره و استوانه» برداشته شده است. خود ارشمیدس، علاقه خاصی به این مساله داشت. بنابر افسانه‌ای، ارشمیدس وصیت کرده بود که بر سنگ مزار او، کره‌ای که محاط در استوانه‌ای باشد، حک کنند و این وصیت هم، به وسیله

نزدیکان او اجرا شد.)

۳۵. رامحل ارشمیدس را، از روی رساله «درباره تریب سهمی»، به زبان نشانه‌های امروزی، می‌آوریم.

مساله این است: مطلوب است مجموع جمله‌های تصاعد نامتناهی نزولی

$$a + b + c + d + \dots$$

با قدر نسبت برابر $\frac{1}{4}$ ، بنابه تعریف تصاعد با قدر نسبت $q = \frac{1}{4}$ داریم:

$$b = \frac{a}{4}, \quad c = \frac{b}{4}, \quad d = \frac{c}{4}, \dots$$

و یا

$$a = 4b, \quad b = 4c, \quad c = 4d, \dots$$

سپس

$$\begin{aligned} b + c + d + \dots + \frac{1}{4}(b + c + d + \dots) &= \\ &= \left(b + \frac{b}{4}\right) + \left(c + \frac{c}{4}\right) + \left(d + \frac{d}{4}\right) + \dots = \\ &= \frac{5}{4}b + \frac{5}{4}c + \frac{5}{4}d + \dots = \frac{1}{4}(4b + 4c + 4d + \dots) = \\ &= \frac{1}{4}(a + b + c + \dots) \end{aligned}$$

از آنجا

$$b + c + d + \dots = \frac{1}{3}a$$

که اگر به دو طرف برابری، a را اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$a + b + c + d + \dots = \frac{4}{3}a$$

و در نتیجه

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{4}{3}$$

(این مساله را، باروش عادی، یعنی استفاده از رابطه حاصل جمع در تصاعد هندسی نزولی، حل کنید.)

۳۱. نتیجه‌ای را که ارشمیدس به دست آورده است، با نشانه‌های امروزی، می‌توان این‌طور نشان داد:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

این رابطه، از اتحاد واضح زیر به دست می‌آید:

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

درواقع، اگر به جای n ، پشت سرهم، مقادیرهای $1, 2, 3, \dots, n$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$1^3 - 0^3 = 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

که از جمع آن‌ها، نتیجه می‌شود:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$+ n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

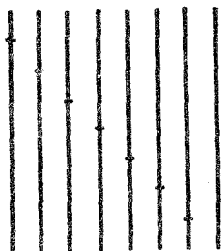
و یا

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ارشمیدس، با بیانی هندسی و به طریق زیر، نتیجه را به دست می‌آورد (شکل ۱۵): «اگر طول‌هایی را، به تعداد دلخواه، در نظر بگیریم، به نحوی



شکل ۱۵

که هر کدام از آن‌ها، نسبت به قبلی، به اندازه کوچکترین این طول‌ها، بزرگتر باشد. و اگر طول‌های دیگری را به همین تعداد در نظر بگیریم، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، برابر بزرگترین طول رشته اول باشد، در این صورت، مجموع همه مربع‌هایی که روی طول‌های

برابر بزرگترین طول ساخته می‌شود، به اضافه مربعی که روی طول بزرگتر ساخته می‌شود به اضافه مساحتی که بین کوچکترین طول، و طولی که برابر با مجموع همه طول‌های نابرابر است، قرار دارد، برابر می‌شود با سه برابر مجموع مربع‌هایی که روی همه طول‌های نابرابر ساخته می‌شود.

با نشانه‌های امروزی، بیان ارشمیدس را می‌توان چنین نوشت:

$$n \cdot n^2 + n^2 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

که از آن‌ها، بعد از انجام عمل‌های لازم، به دست می‌آید:

$$n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

و یا سرانجام

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(مساله، از رساله ارشمیدس، به نام «درباره مارپیچ» گرفته شده است.)

۳۲. حل ارشمیدس. ارشمیدس خطاب به پادشاه هلونا می‌گوید: «تو می‌دانی که بسیاری از اخترشناسان گمان می‌کنند که، همه دنیا کره‌ای است که، مرکز آن در مرکز زمین و شعاع آن برابر فاصله از مرکز زمین تا خورشید است. برخلاف اخترشناسان، آریستارک ساموسی، در نوشته‌های خود می‌کوشد این نظر را رد کند و ثابت کند، همه دنیا مضربی از این مقدار است. اوبه این نتیجه می‌رسد که ستارگان و خورشید بی‌حرکت‌اند، زمین روی دایره‌ای به دور خورشید می‌چرخد و خورشید در مرکز این دایره قرار دارد. قبول می‌کنیم که

قطر کره ستارگان بی حرکت نسبت به قطر همه دنیا - به معنایی که بیشتر اخترشناسان می فهمند (یعنی منظومه شمسی) - مثل نسبت آخری باشد به قطر زمین. من ادعا می کنم، اگر توده ای از شن، حتی به بزرگی کره ستاره ای آریستارک، داشته باشیم، باز هم می توانم عددی را نام ببرم که از تعداد شن های چنین کره فرضی هم بیشتر باشد. پیشنهاد من این است:

(۱) محیط کره زمین، کمتر از ۳ ملیون «ستادی» است [هر «ستادی» برابر ۱۸۵ متر است].

همان طور که می دانی، کوشش شده است ثابت کنند که محیط دایره زمین قریب ۳۰۰۰۰۰ ستادی است، ولی من رای گذشتگان را ترجیح می دهم و و آن را ده برابر بزرگتر می گیرم.

(۲) خورشید از زمین و زمین از ماه بزرگتر است. در این مورد، من با اکثریت اخترشناسان موافقم.

(۳) قطر خورشید از ۳۰ برابر قطر ماه بزرگتر نیست [در واقع، قطر خورشید، قریب ۴۰۰ برابر قطر ماه است].

(۴) قطر خورشید بیشتر از ضلع هزار ضلعی محاط در دایره عظیمه کره سماوی است.

من، این اعتقاد آریستارک را قبول دارم که اندازه ظاهری خورشید را

$\frac{1}{720}$ اندازه دایره منطقه البروج می داند. من خودم زاویه ای را، که خورشید

تحت آن دیده می شود، اندازه گرفته ام، ولی اندازه دقیق این زاویه، به سادگی به دست نمی آید، زیرا، نه چشم ها، نه دست ها و نه وسیله های اندازه گیری، قابل اطمینان نیستند. ولی، این جا، جای باز کردن این مطلب نیست. همین

قدر کافی است بدانیم که، این زاویه، از $\frac{1}{164}$ زاویه قائمه کوچکتر و از

$\frac{1}{350}$ آن بزرگتر است.

بر اساس فرض (۲) و (۳)، قطر خورشید از ۳۰ برابر قطر زمین کوچکتر است. بنابراین، (طبق فرض ۴)، محیط هزار ضلعی محاط در یکی از دایره های

عظیمه کره سماوی، کمتر از ۳۰۰۰۰۰۰ برابر قطر زمین است. ولی، اگر این مطلب درست باشد، آن وقت، قطر همه جهان (یعنی به اعتقاد آریستارک، قطر منظومه شمسی)، کمتر از ۱۰۰۰۰ برابر قطر زمین است، زیرا تنها برای شش ضلعی منتظم، قطر برابر است با $\frac{1}{3}$ محیط، برای هر چند ضلعی دیگر، قطر از $\frac{1}{3}$ محیط کمتر است.

بنابر فرض نخست، محیط دایره زمین، از ۳ میلیون «ستادی» کمتر است؛ در نتیجه، قطر آن، کمتر از یک میلیون «ستادی» می شود، زیرا طول قطر دایره، از $\frac{1}{3}$ محیط آن کمتر است. بنابراین، قطر همه دنیا هم، از ۱۰۰۰۰ میلیون «ستادی» کمتر می شود.

اکنون، فرض می کنیم که، دانه شن، چنان کوچک باشد که ۱۰۰۰۰ از آن، به اندازه یک دانه خشخاش بشود. من قطر دانه خشخاش را $\frac{1}{40}$ اینچ می گیرم. در یکی از آزمایش ها، وقتی ۲۵ دانه خشخاش را در امتداد هم، روی خط راست قرار دادم، یک اینچ شد. ولی من می خواهم، استدلالی را داشته باشم که در برابر هر اعتراضی، تضمین شده باشد.

برای ما [یونانی ها]، تنها نام عددها تا «میریاد» ($10^4 = 10000$) وجود دارد با وجود این، ما تا ۱۰۰۰۰ میریادهم ($10^8 = 10^4 \cdot 10^4$) حساب می کنیم. برای این که جلوتر برویم، ۱۰۰۰۰ میریاد (10^8) را، به عنوان واحد مرتبه دوم، می گیریم و دوباره ۱۰۰۰۰ برابر آن را انتخاب می کنیم، به دست می آید:

$$10^8 \times 10^8 = 10^{16}$$

که آن را، واحد مرتبه سوم می گیریم. به همین ترتیب، می توان ۱۰۰۰۰ میریاد بار از واحد مرتبه سوم را انتخاب کرد و واحد مرتبه چهارم را به دست آورد، ($10^{16} \times 10^8$) و غیره. مثلاً، $10^{16} \times 10^8 = 10^{24}$ ، واحد مرتبه هشتم می شود؛ ضمناً، عدد ۱، واحد مرتبه اول است.

حالا حساب می کنیم که چند دانه شن، که يك میریاد آن حجم يك دانه خشخاش را پر می کند، در کره ای به قطر يك اینچ جا می گیرد. بنا بر فرض ما، هر دانه خشخاش، برابر $\frac{1}{40}$ اینچ است، ولی بنا بر حکم معلوم هندسی، حجم

کره ها بر نسبت مکعب قطرهای آنهاست، یعنی بر نسبت

$$۱۲:۴۰۳ = ۱:۶۴۰۰۰$$

به این ترتیب، کره به قطر يك اینچ، حاوی ۶۴۰۰۰ دانه خشخاش، یا ۶۴۰۰۰ میریاد، یعنی $۱۰^۷ \times ۶۴$ ، یا کمتر از $۱۰^۹$ دانه شن می باشد. نسبت حجم کره به قطر ۱۰۰ اینچ به کره به قطر يك اینچ، مثل ۱:۱۰۰۳ یا ۱:۱۰۶ است. به این ترتیب، روشن است که، در کره به قطر ۱۰۰ اینچ، کمتر از $۱۰^۹ \times ۱۰^۶$ دانه شن است.

کره به قطر ۱۰۰۰۰ اینچ، دارای کمتر از $۱۰^{۱۶} \times ۱۰^۴ \times ۱۰ = ۱۰^{۲۱}$ یعنی ده میریاد واحد مرتبه سوم ما، دانه شن می باشد.

ولی چون «ستادی» از ۱۰۰۰۰ «اینچ» کمتر است، روشن است که در کره به قطر يك ستادی، کمتر از ۱۰ میریاد واحد مرتبه سوم، از دانه های شن وجود دارد، به همین ترتیب، پیدا می کنیم که در کره

به قطر ۱۰۲ ستادی، کمتر از $۱۰^{۸ \times ۳} \times ۱۰۰۰$ دانه شن؛

به قطر ۱۰۴ ستادی، کمتر از $۱۰^{۸ \times ۴} \times ۱۰$ دانه شن؛

به قطر ۱۰۶ ستادی، کمتر از $۱۰^{۸ \times ۶} \times ۱۰ \times ۱۰^۶$ دانه شن؛

به قطر ۱۰۸ ستادی، کمتر از $۱۰^{۸ \times ۵} \times ۱۰^۴ \times ۱۰$ دانه شن؛

به قطر ۱۰^{۱۰} ستادی، کمتر از $۱۰^{۸ \times ۶} \times ۱۰۰۰$ دانه شن، جامی گیرد.

ولی ۱۰^{۱۰}، یعنی ۱۰۰۰۰ میلیون ستادی. و چون قطر همه دنیا، از

۱۰۰۰۰ میلیون ستادی کمتر است، پس در همه دنیا، کمتر از $۱۰^{۸ \times ۶} \times ۱۰۰۰$ دانه شن جا می گیرد. سپس، قطر کره آریستارک از ستارگان بی حرکت، آن قدر

برابر قطر همه دنیا (یعنی ۱۰۰۰۰ میلیون ستادی) است؛ که همه دنیا همان

قدر برابر قطر زمین (یعنی ۱ میلیون ستادی) است. بنا بر این، معلوم می شود

که کره آریستارک (ستارگان بی حرکت)، به کره همه جهان، نسبتی برابر

۱:۱۰^{۱۲} دارد. در نتیجه، می تواند کمتر از ۱۰۰۰ میریاد واحد مرتبه هشتم

($10^6 \times 10^4 \times 10^8 = 10^{18}$) دانه شن در خود جا بدهد.

و پادشاه هه لونا می تواند آن را به همه نشان بدهد: لزومی ندارد که این ها خبرگان ریاضیات باشند، بلکه کافی است درک ریاضی داشته باشند و بتوانند درباره فاصله ها و اندازه های زمین، خورشید، ماه و تمامی جهان بیندیشند. آن وقت، خواهی دید که همه آن ها، آنچه را که گفته ام، می پذیرند، به همین جهت است که این بررسی را نامناسب نمی دانم^۱.

۱. هر کسی که، در زمان ما، دوره دبستان را به پایان رسانده باشد و یسا، بهتر بگوییم، با عدد نویسی (دهدهی)، به خوبی آشنا باشد، می تواند چنین محاسبه ای را انجام دهد و، حتی، عددهای بسیار بزرگتر از آن را هم بنویسد. پس چرا ارشمیدس بزرگ، به این محاسبه خود افتخار می کند و رساله ای مستقل را به آن اختصاص داده است.

واقعیت این است که، حتی در متن ترجمه نوشته ارشمیدس، تا حد زیادی دست کاری شده است؛ چرا که همه عددها را با شکل عدد نویسی امروزی نشان داده ایم، در حالی که، در زمان ارشمیدس، این شکل عدد نویسی وجود نداشته است عدد نویسی معمول امروزی، کمتر از ۲۰۰۰ سال است که معمول شده (یعنی چند سده بعد از ارشمیدس). شکل امروزی عدد نویسی، که به وسیله هندی ها کشف و وارد در فرهنگ بشری شده است، در واقع، انقلابی در حساب، و به طور کلی ریاضیات، به وجود آورد و کار پیشرفت را، به صورت جهشی، تأمین کرد. تمام عمل های امروزی در حساب (جمع، ضرب، تقسیم، ریشه گرفتن، نشان دادن عدد به صورت توان و غیره) بر اساس «موضعی» بودن عدد نویسی است. وقتی که مثلاً می نویسد ۴۴۴، تنها از يك علامت ۴ استفاده کرده اید، ولی ارزش این ۴، بسته به «موضع» و «مرتبه» آن فرق می کند (از سمت راست و به ترتیب، ارزش این علامت، برابر است با ۴، ۴۰، ۴۰۰ و ۴۰۰۰). در یونان باستان، از عدد نویسی موضعی اطلاعی نداشتند و عددها را به کمک حرف های الفبا نشان می دادند (شبهه عدد نویسی به کمک حرف های «ابجد») و به همین مناسبت، هم نوشتن عددها و هم انجام عمل روی آن ها، بسیار دشوار بود. یونانیان، که در جامعه ای برده داری زندگی می کردند و کارهای عملی به عهده برده ها بود، از کار محاسبه و عمل های حساب اکراه داشتند، چرا که به درد عمل و زندگی می خورد و کسر شأن «آزادها» بود که به کارهای عملی - که خاص برده ها بود - بپردازند. به این دلیل است که، هندسه یونانی تا مرز هندسه عالی پیش رفت، ولی حساب و جبر تکان زیادی نخورد.

(این مسئله، از رساله ارشمیدس، به نام محاسبه «دانه‌های شن»، برداشته شده است.)

۳۳. این مسئله ارشمیدس، یعنی رسم يك هفت ضلعي منتظم، در واقع، چهارمین مسئله مشهور دنیای قدیم است. به جز این، سه مسئله مشهور دیگر هم وجود دارد: تضعیف مکعب (مسئله ۳۵)، تثلیث زاویه (مسئله ۳۶) و تربیع دایره (مسئله ۳۷).

ارشمیدس، توانست هفت ضلعي منتظم را، به کمک خط‌کش و پرگار، رسم کند. او از پیش قضیه‌ای استفاده کرده، برای حل آن، باید از حل معادله درجه سومی استفاده کرده، در محدوده رادیکال‌های با درجه ۲ قابل حل نیست و، بنابراین، نمی‌توان ریشه‌های آن را، به کمک خط‌کش و پرگار، رسم کرد. به این ترتیب، ارشمیدس هم می‌دانست که مسئله رسم هفت ضلعي منتظم را، نمی‌توان به طور کامل و دقیق، تنها به کمک خط‌کش و پرگار و بدون استفاده از وسیله‌های دیگر، حل کرد.

به این حکم، که هفت ضلعي منتظم را نمی‌توان به یاری خط‌کش و پرگار رسم کرد، می‌توان به کمک سنگ محک گوس، قانع شد. طبق این معیار (یاسنگ محک)، اگر n عددی اول باشد، برای این که بتوان n ضلعي منتظم را به یاری خط‌کش و پرگار رسم کرد، لازم و کافی است که عدد n به صورت $2^k + 1$ باشد.

عدد ۷ را نمی‌توان به صورت $2^k + 1$ نوشت و، بنابراین، رسم هفت ضلعي منتظم، تنها به یاری خط‌کش و پرگار، ممکن نیست. در واقع، هفت ضلعي منتظم را می‌توان به تقریب و با هر اندازه دقت

→ ارشمیدس را، باید از این جهت هم، استثنائی و نادر به حساب آورد، زیرا برخلاف دیگر فیلسوفان و دانشمندان یونان باستان، هم در زمینه «حساب» و هم در زمینه دیگر دانش‌های عملی، مثل فیزیک و مکانیک، به سختی و به صورتی حیرت‌آور کار کرده است. با دستگاه عدد نویسی آن زمان یونانی‌ها، ارشمیدس حق داشت، برای محاسبه عددی به این بزرگی و نوشتن و نام بردن آن، به خود ببالد. [یادداشت مترجم]

لازم، رسم کرد (به کمک خط کش و پرگار) و اگر بخواهیم، رسم هفت ضلعی منتظم به طور دقیق انجام شود، باید به جز خط کش و پرگار، از وسیله های دیگری هم (مثل گونیای دوقائمه) استفاده کرد.

برای رسم تقریبی هفت ضلعی منتظم، مثلاً، می توان به این ترتیب عمل کرد: ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره، به تقریب برابر است با نصف ضلع سه ضلعی منتظم محاط در همین دایره. در واقع، به ازای $r=1$ داریم:

$$a_7 = 2 \sin \frac{360^\circ}{14} \approx 0.868,$$

از طرف دیگر

$$\frac{a_7}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.867$$

و همان طور که دیده می شود، خطای این تقریب از 0.3% تجاوز نمی کند.

مسئله رسم هفت ضلعی منتظم، منجر به حل این معادله می شود:

$$x^7 - 1 = 0$$

در زیر نشان می دهیم که، این معادله، به کمک رادیکال های با فرجه ۲ قابل حل نیست.

ریشه های هفتم واحد (به جز ۱)، در معادله زیر صدق می کنند:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = -1 \quad (1)$$

$$x = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$$

چون $x^{7-k} = x^{-k}$ ، بنابراین، معادله را می توان چنین نوشت:

$$x + x^{-1} + x^2 + x^{-2} + x^3 + x^{-3} = -1 \quad (2)$$

فرض می کنیم:

$$x + x^{-1} = y \quad (3)$$

آن وقت

$$x^2 + x^{-2} = y^2 - 2 \quad (4)$$

$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y \quad (5)$$

معادله (۲)، به کمک رابطه های (۳)، (۴) و (۵)، به این صورت درمی آید:

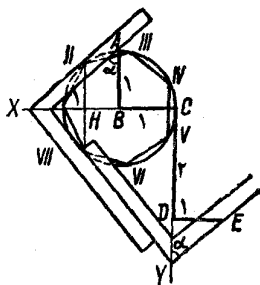
$$y^r + y^r - 2y - 1 = 0 \quad (6)$$

به این ترتیب، مسأله منجر به حل معادله درجه سوم (۶) می شود که می دانیم به کمک رادیکال های با فرجه ۲، قابل حل نیست. در نتیجه، مسأله مربوط به رسم هفت ضلعی منتظم رانمی توان به یاری خط کش و پرگار حل کرد. با وجود این، معادله (۶)، و بنابراین مسأله رسم هفت ضلعی منتظم، به کمک گونیای دو قائمه قابل حل است. یادآوری می کنیم که

$$y = x + x^{-1} = \left(\cos \frac{\gamma\pi}{\gamma} - i \sin \frac{\gamma\pi}{\gamma} \right) + \left(\cos \frac{\gamma\pi}{\gamma} - i \sin \frac{\gamma\pi}{\gamma} \right) = \gamma \cos \frac{\gamma\pi}{\gamma}$$

بنابراین، اگر دور رأس هفت ضلعی منتظم را، یک درمیان، به هم وصل کنیم، وتری به دست می آید که فاصله مرکز دایره از آن، برابر $\frac{Y}{2} = \cos \frac{2\pi}{7}$ می شود.

اکنون، معادله (۶) را به کمک رسم حل می کنیم. برای این منظور،



شکل ۱۶

خط شکسته ABCDE را می کشیم
(شکل ۱۶)، به نحوی که $AB \perp BC$ ،
 $BC \perp CD$ و $CD \perp DE$ ، و ضمناً،
 $AB = ۱$ ، $BC = ۱$ ، $CD = ۲$ و
 $DE = ۱$ باشد (۱، ۲، ۱، ۱)، قدر مطلق
ضریبها در معادله (۶) هستند).

حالا، گونیای دوقائمه را، آن طور

که در شکل ۱۶ می بینید، قرار می دهیم

و، به اصطلاح، خط شکسته $AXYE$ را رسم می‌کنیم. با محاسبه معلوم می‌شود که $XB = y$ (جواب مورد نظر). این محاسبه را انجام می‌دهیم. زاویه XAB را α می‌نامیم، در این صورت داریم:

$$XB = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\begin{aligned} CY &= XC \operatorname{tg} \alpha = (XB + 1) \operatorname{tg} \alpha = \\ &= (\operatorname{tg} \alpha + 1) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

$$CY = 2 + DY = 2 + \cotg \alpha = 2 + \frac{1}{\tg \alpha} = \frac{2 \tg \alpha + 1}{\tg \alpha}$$

از برابر قرار دادن دو مقداری که برای CY به دست آمد، نتیجه می شود:

$$\frac{2 \tg \alpha + 1}{\tg \alpha} = \tg^2 \alpha + \tg \alpha,$$

$$\tg^2 \alpha + \tg \alpha - 2 \tg \alpha - 1 = 0$$

و دیده می شود که $\tg \alpha = XB$ ، در معادله (۶) صدق می کند.

بنابراین، پاره خط XB را می توان به جای y در نظر گرفت. می دانیم

$$\frac{y}{2} = \frac{XB}{2}$$
 عبارت است از فاصله مرکز B تا وترى که دو رأس هفت ضلعی

منتظم را، يك درمیان، به هم وصل کرده باشد. نقطه H وسط XB را پیدا

می کنیم و از آن جا، عمودی بز XB اخراج می کنیم تا دایره را در نقطه های

II و VII قطع کند. به این ترتیب، دو رأس از رأس های هفت ضلعی منتظم

به دست می آید و، به کمک آنها، بقیه رأس ها هم، به سادگی، پیدا می شوند.

۳۴. تعداد گاوهای نر سفید، سیاه، کردند و چند رنگ را، به ترتیب،

X، Y، Z و T و تعداد گاوهای ماده از همین رنگ ها را، به ترتیب،

x، y، z و t می گیریم. مسأله، منجر به حل دستگاه معادله های زیر می شود:

$$X = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Y + Z,$$

$$Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)T + Z,$$

$$T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)X + Z,$$

$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(Y + y)$$

$$y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(T + t),$$

$$t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z),$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(X + x)$$

به این معادله‌ها، باید دو شرط دیگر را هم اضافه کرد:

$$X + Y, \text{ برابر يك عدد مربعی است,}$$

$$T + Z, \text{ برابر يك عدد مثلثی است.}$$

به زبان دیگر

$$X + Y = p^2$$

$$T + Z = \frac{q(q+1)}{2}$$

ارشمیدس، حل این مسأله را به تفصیل داده است. در آن جا، برای

X ، تعداد گاوهای نر سفید، این جواب به دست آمده است:

$$X = 1598 \times 10^{206541}$$

و تعداد کل گاوهای نر

$$7766 \times 10^{2065410}$$

ای. ن. وسه لوسکی، در تفسیر این مسأله می نویسد: برای نوشتن جواب

«به کتابی ۶۰۰ صفحه ای نیاز داریم، به شرطی که، در هر صفحه، ۲۵۰۰ رقم

جا بدهیم».

۳۵. سرچشمه مسأله دو برابر کردن (تضعیف) مکعب را باید، ظاهراً،

در تمایل دانشمندان باستانی، به تعمیم مسأله ساده دو برابر کردن مربع دانست.

دو برابر کردن مربع، یعنی رسم مربعی که مساحت آن، دو برابر مساحت مربع مفروض باشد.

دشواری هایی که در مسیر حل مسأله تضعیف مکعب وجود داشت،

موجب پیدایش افسانه هایی درباره سرچشمه این مسأله بوده است. برای

نمونه، یکی از این افسانه ها را می آوریم. این افسانه، به اراتوستن (۲۷۶

تا ۱۹۴ پیش از میلاد)، ریاضی دان، اخترشناس و فیلسوف مشهور یونانی،

منسوب است. او درباره علت هایی که دانشمندان باستانی را، وادار

به بررسی مسأله مربوط به تضعیف مکعب کرده است، این طور حکایت می کند.

زمانی در جزیره دیلوس، واقع در دریای اژه، بیماری طاعون شیوع پیدا کرد. اهالی این جزیره، برای کمک و مشورت، به کاهن بزرگ دلفی، که در معبد آپولون در دلفی زندگی می کرد، مراجعه کردند (دلفی - مرکز عام مذهبی یونانیان در فوکید، در دامنه کوه پارناس).

کاهن بزرگ، برای تسکین درد و اندوه مردم، پاسخ داد که باید لطف خدایان را جلب کرد و، برای این منظور باید محراب طلائی آپولون را، که به شکل مکعب است، دوبرابر کرد.

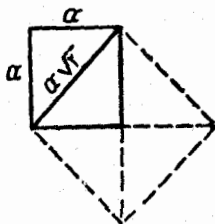
اهالی دیلوس، با عجله، دو محراب طلائی، به اندازه ای که در معبد آپولون بود، ساختند و آن ها را روی هم گذاشتند. به این امید که مسأله دو برابر کردن قربان گاه مکعبی را حل کرده اند.

ولی طاعون تمام نشد. مردم دوباره به کاهن بزرگ مراجعه کردند و با حیرت پرسیدند: «چرا با وجودی که محراب طلائی آپولون بزرگ را دو برابر کرده ایم، طاعون از بین نمی رود؟» ولی کاهن بزرگ پاسخ داد: «نه، شما مسأله مورد نظر را حل نکرده اید؛ شما باید قربان گاه را طوری دوبرابر کنید، که شکل مکعبی آن تغییر نکند».

و چون از حل مسأله، آن طور که کاهن دیلوس خواسته بود، عاجز ماندند، از افلاطون، فیلسوف و ریاضی دان، تقاضای کمک کردند. ولی او، به طور مبهم پاسخ داد: «احتمالاً، خدایان به این مناسبت از شما ناراضی اند که به هندسه، کم می پردازید». با وجود این، خود افلاطون هم نتوانست این مسأله را به کمک خط کش و پرگار، حل کند. از همان زمان ها، این مسأله را مسأله «دیلوسی» هم گفته اند.

یونانیان باستان، مسأله مربوط

به دو برابر کردن مربع را، نسبتاً ساده حل می کردند. برای این منظور، باید بتوان ریشه دوم ۲ را، به کمک پرگار و خط کش، رسم کرد. در واقع، اگر طول ضلع مربع مفروض را a بگیریم، ضلع مورد نظر - که آن را x می نامیم -



شکل ۱۷

باید در این شرط صدق کند.

$$x^2 = 2a^2$$

واز آن جا

$$x = a\sqrt{2}$$

بنابراین، x را باید برابر قطر مربع مفروض گرفت که، بنا بر قضیه فیثاغورث، برابر با $a\sqrt{2}$ می شود (شکل ۱۷).

یونانیان، با تعمیم مسأله مربوط به دو برابر کردن مربع، می خواستند مسأله مربوط به دو برابر کردن مکعب را هم، به کمک خط کش و پرگار، حل کنند. حل مسأله مربوط به دو برابر کردن مکعب، منجر به رسم ریشه سوم $\sqrt[3]{2}$ ، به کمک خط کش و پرگار، می شود. در واقع، اگر طول یال مکعب مفروض را a فرض کنیم و طول یال مکعب دو برابر آن را x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x^3 = 2a^3$$

واز آن جا

$$x = a\sqrt[3]{2}$$

ولی تمام تلاش ها، برای رسم $\sqrt[3]{2}$ ، به کمک خط کش و پرگار، بدون نتیجه ماند. این تلاش های بی ثمر، همچنان ادامه داشت تا اینکه، در نیمه اول سده نوزدهم، ثابت شد که رسم $\sqrt[3]{2}$ به کمک خط کش و پرگار، ممکن نیست. برای این که تصویری درباره قابل حل بودن یا غیر قابل حل بودن مسأله های مربوط به ساختمان های هندسی داشته باشیم، به یاد آوری کوتاه زیر، اکتفا می کنیم.

قبل از هر چیز، به یاد می آوریم که عبارت های زیر را می توان، به سادگی و به کمک خط کش و پرگار، رسم کرد:

$$a+b, a-b, \frac{a \cdot b}{c}, \sqrt{a \cdot b}, \sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2-b^2}$$

که در آنها، a ، b ، و c ، پاره خط هایی مفروض اند.

اگر حل مسأله ای، منجر به انجام تعداد محدودی عمل های پشت سر هم، از این نوع ها باشد، آن وقت، مسأله به کمک پرگار و خط کش، قابل حل است. ولی اگر حل مسأله، محدود به انجام متوالی تعدادی متناهی از این عمل ها

نشود، آن وقت نمی توان چنین مساله ای را، به کمک خط کش و پرگار، حل کرد. مساله مربوط به تضعیف مکعب هم، نمونه ای از همین مساله هاست، و نمی توان آن را، تنها به یاری خط کش و پرگار، یعنی تنها با رسم خط راست و دایره، حل کرد.

گفتیم که مساله مربوط به تضعیف مکعب، منجر به حل این معادله درجه سوم می شود:

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

که در آن، a و x به ترتیب عبارتند از طول یال های مکعب مفروض و مکعب مجهول.

اگر برای سادگی کار، یال مکعب مفروض را برابر ۱ بگیریم، به معادله $x^3 - 2 = 0$ می رسیم. به سادگی می توان ثابت کرد که این معادله باضریب های گویا، دارای ریشه گویا و یا ریشه ای که به صورت جذر يك عدد گویا باشد، نیست. بنابراین، طبق آنچه گفتیم، نمی توان آن را، به کمک خط کش و پرگار، رسم کرد.

نخستین دانشمندی که، به روشنی، اعتقاد خود را مبنی بر ناممکن بودن رسم پاره خطی برای $\sqrt[3]{2}$ ، به کمک خط کش و پرگار، اظهار کرد، رنه دکارت، دانشمند فرانسوی بود. او در سال ۱۶۳۷، این حکم را ارائه داد که: ریشه سوم عددی که مکعب درست ندارد، عددی گنگ است و محاسبه آن را نمی توان منجر به تعداد محدودی عمل جذر گرفتن کرد.

اثبات دقیق مساله قابل نبودن مساله تضعیف مکعب را، به کمک خط کش و پرگار، پ. و نتل، ریاضی دان فرانسوی، در سال ۱۸۳۷ به دست داد. یکی از نخستین هندسه دانان یونان قدیم، که با استفاده از وسیله های دیگری، علاوه بر خط کش و پرگار، گام مهمی برای حل مساله تضعیف مکعب برداشت، بقراط خیوسی (سده پنجم پیش از میلاد) بود.

بقراط خیوسی، حل مساله فضایی تضعیف مکعب را، منجر به بررسی يك مساله مسطحه کرد. این مساله عبارت بود از جست و جوی دو واسطه هندسی، بین دو پاره خطی که یکی دو برابر دیگری باشد به زبان دیگر، او

می خواست، دو پاره خط x و y را طوری پیدا کند که اگر آن‌ها را بین دو عدد مفروض a و $2a$ قرار دهند، يك تصاعد هندسی به دست آید:

$$a, x, y, 2a$$

برای این که، این چهار مقدار به تصاعد هندسی باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

از آن جا: $x^2 = 2ax$ و $y^2 = 2ay$. بنابراین

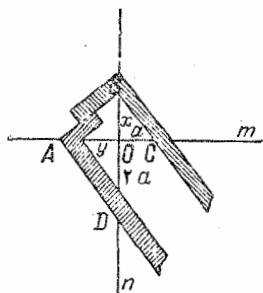
$$x^2 = a^2 y^2 = 2a^3 x \Rightarrow x^2 = 2a^3$$

روشن است که x عبارت است از ضلع مکعبی که حجم آن، دو برابر حجم مکعب مفروض به ضلع a باشد.

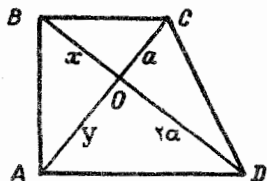
معلوم است که «درج» واسطه‌های x و y را نمی‌توان به کمک خط کش و پرگار انجام داد؛ زیرا این عمل منجر به پیدا کردن $x = \sqrt[3]{2}$ به کمک خط کش و پرگار می‌شود که، البته، ممکن نیست.

به نظر می‌رسد که «درج» واسطه‌های x و y را می‌توان به انجام رسانید، به شرطی که از وسیله‌های اضافی و تکمیلی، که به همین منظور آماده می‌شود، استفاده کنیم. افلاطون و اراتوستن، برای پیدا کردن واسطه‌های x و y (وقتی که بین پاره‌های معلوم a و $2a$ قرار گیرند و با آن‌ها، يك تصاعد هندسی بسازند)، وسیله‌های ساده و بکری پیشنهاد کردند.

وسیله افلاطون، از دو گونیای معمولی نجاری تشکیل می‌شد. خود



شکل ۱۹



شکل ۱۸

ساختمان هندسی، بر مبنای این پیش قضیه بود: در هر دوزنقه قائم الزاویه (شکل ۱۸)، که قطرهای عمود بر هم داشته باشد، قطعه‌های قطرها، تشکیل يك تصاعد هندسی می‌دهند:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

(ثابت کنید!)

رسم واسطه‌های x و y ، که برای حل مسأله تضعیف مکعب لازم است، منجر به عمل‌های زیر می‌شود. دو خط راست m و n را در نظر می‌گیریم که بر هم عمود و در نقطه O متقاطع باشند (شکل ۱۹). روی m و در طرف راست O ، پاره خط $OC = a$ را جدا می‌کنیم (a ، ضلع مکعبی است که می‌خواهیم دو برابر آن را پیدا کنیم). روی خط راست n و در پایین O ، پاره خط $OD = 2a$ را جدا می‌کنیم. اکنون، دو گونیا بر می‌داریم (گونیاها را هاشور زده‌ایم) و آن‌ها را طوری قرار می‌دهیم (شکل ۱۹ را ببینید) که يك ضلع گونیای اول از نقطه C - که نقطه‌ای معلوم است - بگذرد و راس آن بر خط راست n واقع باشد. همین‌طور، يك ضلع گونیای دوم از نقطه D - که معلوم است - بگذرد و راس آن بر خط راست m قرار گیرد. دو ضلع دیگر گونیاها، باید در امتداد هم باشند.

وقتی که دو گونیا را به این ترتیب قرار دهیم، روی خط‌های راست m و n ، نقطه‌های A و B به دست می‌آید. در نتیجه، اگر فرض کنیم $OB = x$ و $OA = y$ ، طبق پیش قضیه داریم:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

و از آن‌جا

$$x^3 = 2a^3$$

$x = OB$ ، همان یال مکعب مورد نظر ماست.

وسیله اراتوستن را «مه‌زولاب» (*mesolabe*) می‌نامند که به معنای «دام» است، یعنی وسیله‌ای که، دو مقدار واسطه را، که یکی از آن‌ها ضلع مکعب مجهول است، به دام می‌اندازد.

زاویه‌ای را که می‌خواهیم به سه قسمت برابر تقسیم کنیم، با 3α نشان می‌دهیم و $\cos 3\alpha$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه‌های مثلثاتی، معلوم است که

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

دو طرف این رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha$$

اگر $2\cos 3\alpha = a$ و $2\cos\alpha = x$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$a = x^3 - 3x$$

یا

$$x^3 - 3x - a = 0 \quad (1)$$

برای این که ثابت کنیم، مسئله تثلیث زاویه، به کمک خط کش و پرگار، در حالت کلی قابل حل نیست، کافی است نشان دهیم که، دست کم، یک زاویه وجود دارد که نمی‌شود آن را، به کمک خط کش و پرگار، به سه قسمت برابر، تقسیم کرد. با استدلال ساده‌ای می‌توان نتیجه گرفت که زاویه 60° درجه، در چنین وضعی است. در واقع اگر فرض کنیم: $3\alpha = 60^\circ$ ، به دست می‌آید:

$$\cos 3\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{و معادله (۱) چنین می‌شود:} \quad x^3 - 3x - 1 = 0$$

در جبر ثابت می‌شود که، چنین معادله‌ای، یا ریشه گویا ندارد و یا، اگر ریشه گویایی داشته باشد، تنها می‌تواند 1 یا -1 باشد. ولی هیچ کدام از این دو عدد، در معادله (۲) صدق نمی‌کنند، یعنی معادله (۲)، ریشه گویا ندارد. بنابراین، طبق «قضیه غیر قابل حل»، نمی‌توان زاویه 60° درجه را، به کمک خط کش و پرگار، به سه قسمت برابر تقسیم کرد. از این مطلب، که زاویه 60° درجه را نمی‌توان به کمک خط کش و پرگار به سه قسمت برابر تقسیم کرد، نتیجه می‌شود که، زاویه 20° درجه و زاویه 40° درجه، هیچ کدام، به کمک خط کش و پرگار، قابل رسم نیستند. از این جا، نتیجه مهمی حاصل می‌شود: ۹ ضلعی منتظم، ۱۸ ضلعی منتظم و غیره را نمی‌توان به کمک خط کش و پرگار رسم کرد.

برای زاویه α از معادله (۱)، می‌توان بی نهایت مقدار پیدا کرد که، به ازای هر کدام از آن‌ها، معادله (۱) در محدوده رادیکال‌های با فرجه ۲، قابل

حل نباشند و، بنابراین، مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها وجود دارد که ثلث کردن آن‌ها، به کمک خط‌کش و پرگار، ممکن نیست.

به این ترتیب، اگر بخواهیم تنها از خط‌کش و پرگار استفاده کنیم، مسئلهٔ تثلیث زاویه قابل حل نیست.

دانشمندان باستانی می‌توانستند، زاویه قائمه را به کمک خط کش و پرگار، به سه قسمت برابر تقسیم کنند. این امکان را می‌توان به صورت نظری ثابت کرد. وقتی که داشته باشیم $90^\circ = \alpha$ ، به دست می‌آید: $a = 0$ و معادله (۱) چنین می‌شود:

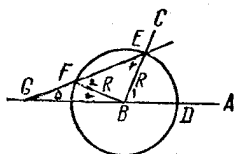
$$X^r - rX = 0 \quad (3)$$

ریشه‌های معادله (۳)، عبارتند از 0 ، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$. به این ترتیب، ریشه‌های غیر صفر این معادله، باریشه دوم بیان می‌شوند. این نتیجه‌گیری، به معنای آن است که زاویه 90° درجه را می‌توان، به کمک پرگار و خط‌کش، به سه قسمت برابر تقسیم کرد.

با استدلال مشابهی: می‌توان ثابت کرد که زاویه ۴۵ درجه هم، به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تقسیم به سه بخش برابر است.

باید یادآوری کنیم که، تثلیث زاویه، به کمک خط کش و پرگار، برای مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها، ممکن است. مثلاً، همه زاویه‌های به صورت $\frac{\pi}{n}$ (n، عددی است درست و مثبت) را می‌توان، با همین وسیله‌ها، به سه قسمت برابر تقسیم کرد (خودتان، این حکم را ثابت کنید).

ارشمیدس، راه حل بسیار ساده و بکری برای حل مسئله تثلیث زاویه، به کمک پرگار و خط کشی که دو نشانه متحرک داشته باشد، ارائه داده است. روش کار را روی نمونه ای مشخص نشان می دهیم.



شکل ۲۹

فرض کنید ، بخواهیم زاویه
حاده و دلتا ABC را به سه قسمت
برابر تقسیم کنیم. برای این منظور به
مرکز B و شعاع دلتا R، دایره‌ای
رسم می‌کنیم (شکل ۲۱). نقطه‌های

برخورد این دایره را با ضلع‌های زاویه، به D و E نشان می‌دهیم. حال، خط کش بادونشانۀ متحرک G و F را برمی‌داریم و FG را برابر R می‌گیریم. خط کش را در نقطۀ E طوری قرار می‌دهیم که F و G با نقطۀ E در یک امتداد قرار گیرند، ضمناً، F بر محیط دایره و G بر امتداد ضلع BA واقع شود. در این صورت، زاویۀ EGD، برابر یک سوم زاویۀ مفروض ABC خواهد شد. این حکم را ثابت می‌کنیم.

برای سادگی کار، زاویه‌ها را روی شکل با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نشان داده‌ایم. باید ثابت کنیم که زاویۀ ۵، برابر یک سوم زاویۀ ۱ می‌باشد.

داریم: $\hat{1} = \hat{5} + \hat{2}$ (خاصیت زاویۀ بیرونی مثلث)، و $\hat{3} = \hat{5} + \hat{4}$ (همان خاصیت). از طرف دیگر، $\hat{5} = \hat{4}$ (خاصیت مثلث متساوی‌الساقین). بنابراین: $\hat{3} = 2 \times \hat{5}$. در مثلث متساوی‌الساقین BEF داریم: $\hat{3} = \hat{2}$ ، در نتیجه

$$\hat{1} = \hat{5} + \hat{2} = \hat{5} + \hat{3} = \hat{5} + 2 \times \hat{5} = 3 \times \hat{5}$$

یعنی زاویۀ ۵، برابر است با یک سوم زاویۀ ۱.

هرچه راه‌حل‌های بیشتر و تازه‌تری، برای مسألهٔ تثلیث زاویه پیدا می‌شد، بیشتر روشن می‌شد که، این مسأله، به‌طور جدی با مسأله‌های جبر و مثلثات بستگی دارد. مثلاً غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در سدهٔ پانزدهم، از تثلیث زاویه، برای تنظیم جدول‌های مثلثاتی بسیار دقیق، که برای محاسبه‌های ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده کرد. او با استفاده از روش تقریبی حل عددی معادلۀ درجۀ سوم، با معلوم بودن $\sin 3^\circ$ ، توانست $\sin 1^\circ$ را به‌دست آورد. سپس، ویت، ریاضی‌دان فرانسوی، در سدهٔ شانزدهم، براساس تثلیث زاویه، توانست راه‌حل مثلثاتی معادلۀ درجۀ سوم را پیدا کند. دکارت، نیوتون، کلرو، شال و بسیاری از دانشمندان دیگر هم، راه‌حل‌های تازه و بکری، برای تثلیث زاویه داده‌اند، که البته، نسبت به راه‌حل ارشمیدس، بغرنج‌ترند. همهٔ این راه‌حل‌ها، معمولاً براساس جست‌وجوی نقطه‌های برخورد یک مقطع مخروطی با دایره قرار دارند.

تلاش، برای پیدا کردن راه حل های تازه ای در مورد مسأله تثلیث زاویه ، حتی در زمان ما هم ادامه دارد (مثلاً ، به کمک مونیوگرافی) .

۳۷. تلاش دانشمندان یونان باستان، برای حل مسأله تربیع دایره، از راه رسم خط راست و دایره ، مثل دو مسأله قبل، با عدم موفقیت روبرو شد. در واقع مسأله تربیع دایره هم، همچون مسأله های تضعیف مکعب و تثلیث زاویه، به کمک خط کش و پرگار، قابل حل نیست.

حتی در سال ۱۷۵۵، فرهنگستان علوم پاریس، به خاطر تلاش بیهوده ای که ریاضی دانان - و حتی بسیاری از ناآشنایان به ریاضیات - در راه حل مسأله تربیع دایره به کار می بردند، تصمیم گرفت که دیگر ، هیچ اثری را که مربوط به بررسی تربیع دایره (و همچنین، تضعیف مکعب و تثلیث زاویه) باشد، قبول نکند. و این ، تا حدی، حرارت «تربیع کنندگان دایره» را فرونشاند.

در نیمه دوم سده نوزدهم بود که، سرانجام، ف. لیندمان، ریاضی دان آلمانی، ثابت کرد که مسأله تربیع دایره، به کمک خط کش و پرگار ، غیر قابل حل است. اثبات لیندمان دشوار است و از محدوده درس های دبیرستانی ریاضیات، بیرون می رود. با توجه به استدلال های لیندمان، به یادآوری های کوتاه زیر قناعت می کنیم.

دایره ای با شعاع R در نظر می گیریم. می خواهیم مربعی بسازیم که هم ارز با این دایره باشد (یعنی مساحتی برابر مساحت دایره داشته باشد). ضلع مربع مورد نظر را x می گیریم، در این صورت، باید داشته باشیم:

$$x^2 = \pi R^2$$

و از آن جا

$$x = R\sqrt{\pi}$$

به این ترتیب ، مسأله ساختن مربعی هم ارز دایره مفروض ، منجر به رسم پاره خطی می شود که برابر با حاصل ضرب پاره خط مفروض R در عدد $\sqrt{\pi}$ باشد. ضمناً، این ترسیم را نباید به کمک خط کش و پرگار انجام داد، یعنی از راه رسم تعداد محدودی خط راست و دایره.

به كمك خط كش و پرگار ، همیشه می توان حاصل ضرب پاره خط مفروض R را ، در عدد مفروض گویا (درست یا کسری) رسم کرد. ولی ، همیشه نمی توان ، به كمك این وسیله ها ، حاصل ضرب پاره خط مفروض را در عددی گنگ ، رسم کرد . این امکان ، در بعضی حالت ها ، مثلاً وقتی که عدد گنگ برابر $\sqrt{2}$ یا $\sqrt{2}-\sqrt{2}$ باشد ، میسر است . $R/\sqrt{2}$ را می توان ، به عنوان ضلع مربع محاط در دایره به شعاع R و $R\sqrt{2}-\sqrt{2}$ را ، به عنوان ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R ، در نظر گرفت . ضمناً می دانیم که ، دوازده ضلعی منتظم را می توان ، به صورتی کاملاً دقیق ، و به كمك شش ضلعی منتظم محاطی ، رسم کرد .

در نظریه ساختمان های هندسی ثابت شده است که پاره خط مفروض R را وقتی می توان ، به كمك خط كش و پرگار ، در يك عدد حقیقی ضرب کرد که این عدد حقیقی بتواند ریشه يك معادله جبری با ضریب های درست و قابل حل به كمك رادیکال های با فرجه ۲ باشد . عددی که نتواند ریشه يك معادله جبری با ضریب های درست باشد ، عدد غیر جبری (ترانساندان) نامیده می شود . بنابراین ، به كمك خط كش و پرگار ، نمی توان حاصل ضرب پاره خط مفروض R را در يك عدد غیر جبری رسم کرد .

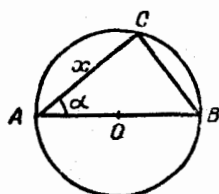
بنابراین ، برای اثبات قابل حل نبودن مسئله تربیع دایره ، به كمك خط كش و پرگار ، باید عدم امکان رسم حاصل ضرب پاره خط مفروض R در عدد $\sqrt{\pi}$ را ، به كمك این وسیله ها ، ثابت کرد و ، برای این منظور ، باید ثابت کرد که $\sqrt{\pi}$ یا π ، عددی است غیر جبری .

خدمت لیندمان هم همین بود که ، برای نخستین بار در جهان دانش ، ثابت کرد که π ، عددی است غیر جبری و ، از این راه ، به طور قطع نتیجه گرفت که حل مسئله تربیع دایره ، به كمك خط كش و پرگار ، ممکن نیست . به این جهت است که لیندمان را «فاتح عدد π » نامیده اند .

۱. برای آشنائی با اثبات کامل غیر جبری بودن عدد π ، به شماره ۱۳ مجله «آشتی با ریاضیات» (اسفند ۱۳۵۸) ، صفحه های ۶۱ تا ۱۲۸ مراجعه کنید .

به این ترتیب، ثابت می شود که مسئله تربیع دایره، تنها به یاری خط کش و پرگار، قابل حل نیست. با وجود این، این مسئله را می توان با استفاده از ابزارهای اضافی و با استفاده از بعضی منحنی های خاص (مثل کوادراتریس) با دقت حل کرد. با استفاده از خط کش و پرگار، مسئله تربیع دایره را، تنها به تقریب می توان حل کرد.

در این جا، یکی از راه حل های تقریبی مسئله تربیع دایره را، براساس استفاده از مثلث بینک، می آوریم. این روش را، بینک، یک مهندس روسی در سال ۱۸۳۶ پیشنهاد کرده، برای استفاده در موارد عملی، روش بسیار ساده ای است.



شکل ۲۲

مثلث ABC را در دایره ای که باید تربیع کنیم، چنان محاط می کنیم که ضلع بزرگتر آن، منطبق بر قطر دایره باشد (شکل ۲۲). زاویه CAB را α و وتر AC را x می نامیم. زاویه α را طوری انتخاب می کنیم که پاره خط x ، برابر ضلع مربع هم ارز دایره مفروض باشد. برای این منظور، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2R}$$

که در آن، R برابر با شعاع دایره است. چون مساحت مربع به ضلع x ، باید با مساحت دایره برابر باشد، داریم:

$$x^2 = \pi R^2 \Rightarrow 4R^2 \cos^2 \alpha = \pi R^2 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\pi}{4}$$

که در نتیجه، به دست می آید:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \approx 0.886$$

و از روی جدول معلوم می‌شود:

$$\alpha = 27^{\circ} 36'$$

بنابراین، بارسم وتری در دایره که با قطر آن، زاویه‌ای برابر 27° درجه و $36'$ دقیقه بسازد، ضلع مجهول مربع مورد نظر به دست می‌آید، یعنی مربعی که هم‌ارز با دایره است.

مثلث ABC همان مثلث بینک است.

۳۸. وقتی که تعداد جمله‌های تصاعد حسابی زوج باشد، می‌توان آن را

چنین نوشت:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$$

ابتدا مجموع نیمه اول همه جمله‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

و سپس، مجموع نیمه دوم:

$$S_2 = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} \cdot n$$

اکنون، تفاضل این دو مجموع را، به دست می‌آوریم.

$$S_2 - S_1 = \frac{a_{n+1} + a_{2n} - a_1 - a_n}{2} \cdot n$$

از طرف دیگر داریم:

$$a_n = a_1 + dn - d, a_{n+1} = a_1 + dn, a_{2n} = a_1 + 2dn - d$$

که در آن، d عبارت است از قدرنسبت تصاعد حسابی. در نتیجه

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \frac{a_1 + dn + a_1 + 2dn - d - a_1 - a_1 - dn + d}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2dn}{2} \cdot n = dn^2 \end{aligned}$$

به این ترتیب: $S_2 - S_1 = dn^2$. و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

*

این مسأله، متعلق به هیپسیکلس اسکندرانی است که در سده دوم پیش از

میلاد می زیسته است. کتاب چهاردهم «مقدمات» اقلیدس هم، منسوب به اوست. از این دانشمند، مسأله‌های جالب زیادی باقی مانده است.

۳۹. هرون این مسأله، و مسأله‌های مشابه آن را، به کمک رابطه‌ای حل می‌کرد، که به نام خود او مشهور شده است.

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}},$$

$$S = ۸۴ \quad (\text{واحد مربع})$$

*

هرون اسکندرانی، دانشمند یونان باستان، در نزدیکی‌های سده اول زندگی می‌کرد. درباره زندگی او، تنها آگاهی‌های پراکنده‌ای به ما رسیده است. او یکی از دانشمندان و مهندسان مشهور زمان خود بود و در زمینه مسأله‌های نقشه‌برداری (ژئودزی) کار می‌کرد. یک رساله ریاضی، به نام «متریک» به هرون منسوب است که، در آن، قاعده‌هایی برای حل عددی معادله‌های درجه دوم و روش‌هایی برای محاسبه تقریبی جذر و کعب وجود دارد. در بخش هندسی این رساله، رابطه‌هایی برای محاسبه شکل‌های مختلف هندسی (سطح و حجم) داده شده است و در همان جا است که رابطه مشهور مربوط به محاسبه مساحت مثلث، از روی سه ضلع آن، آمده است.

۴۰. ضلع‌های چنین مثلثی را $x-1$ ، x و $x+1$ می‌گیریم. برای چنین مثلثی، اگر p نصف محیط و a و b و c طول ضلع‌های آن باشد، داریم:

$$p = \frac{3x}{2}, \quad p-a = \frac{x}{2} + 1, \quad p-b = \frac{x}{2}, \quad p-c = \frac{x}{2} - 1$$

و بنابراین، اگر مساحت مثلث را S بنامیم:

$$S = \sqrt{\frac{3x}{2} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} - 1 \right)} = \frac{x}{2} \sqrt{3 \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right)}$$

که اگر $\frac{x}{2} = m$ و m را عددی درست فرض کنیم:

$$S = m \sqrt{3(m^2 - 1)}$$

$m^2 - 1$ را برابر $3n^2$ و n را عددی درست می گیریم ، در این صورت $S = 3mn$ ، عددی درست می شود . ولی ، با توجه به این فرض ، باید داشته باشیم :

$$m^2 - 3n^2 = 1 \Rightarrow (m + n\sqrt{3})(m - n\sqrt{3}) = 1 \quad (1)$$

برابری (۱) ، به ازای $m = 2$ و $n = 1$ برقرار است :

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

از آن جا

$$(2 + \sqrt{3})^p \cdot (2 - \sqrt{3})^p = 1 \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

از برابری های (۱) و (۲) نتیجه می شود :

$$m_p + n_p\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^p$$

$$m_p - n_p\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^p$$

و از آن جا

$$x_p = 2m_p = (2 + \sqrt{3})^p + (2 - \sqrt{3})^p$$

و از این رابطه ، می توان مثلث های هرونی را به دست آورد :

$$p = 1 \Rightarrow x_1 = 4, \quad S_1 = 6;$$

$$p = 2 \Rightarrow x_2 = 14, \quad S_2 = 84;$$

$$p = 3 \Rightarrow x_3 = 52, \quad S_3 = 1170;$$

$$p = 4 \Rightarrow x_4 = 194, \quad S_4 = 16296;$$

و غیره .

۴۱ . مستقیماً می توان تحقیق کرد که ، اگر رشته عددهای فرد را ، به همان

نحوی که در صورت مسأله خواسته است ، به گروه هایی تقسیم کنیم ، یعنی

$$1, \quad 3+5, \quad 7+9+11, \quad 13+15+17+19, \quad \dots$$

در آن صورت داریم :

$$1 = 1^2$$

$$3+5 = 8 = 2^3$$

$$7+9+11 = 27 = 3^3$$

$$13+15+17+19 = 64 = 4^3$$

$$\dots\dots\dots$$

اکنون، حکم مسأله را، درحالت کلی ثابت می کنیم.

تعداد جمله ها، در $(n-1)$ گروه نخست، چنین است:

$$1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

آخرین جمله در گروه $(n-1)$ ام برابر است با: $n(n-1)-1$. بنابراین، نخستین جمله از گروه n ام، چنین می شود:

$$n(n-1)-1+2=n(n-1)+1=n^2-n+1$$

و آخرین جمله از گروه n ام:

$$n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1$$

بنابراین، مجموع جمله ها در گروه n ام، برابر است با

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2} \cdot n = n^3$$

*

مؤلف این مسأله، نیکوماکوس جیراسی، از دانشمندان سده اول یونان باستان است. رساله «ورودی به حساب»، منسوب به اوست. این کتاب، مدت ها به عنوان کتاب درسی ریاضیات مقدماتی، مورد استفاده قرار می گرفت.

۴۲. باید ثابت کرد (شکل ۲۳)

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

زاویه KBC را برابر زاویه

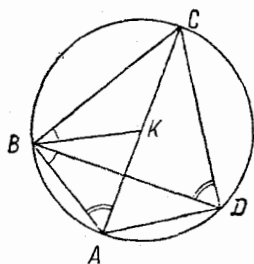
ABD می سازیم. دو مثلث ABK و

BCD متشابه اند، زیرا دو زاویه

ABK و DBC باهم و دو زاویه

BAC و BDC باهم برابرند. در نتیجه

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD}$$



شکل ۲۳

و یا

$$AB \cdot CD = AK \cdot BD$$

(۱)

دو مثلث ABD و KBC هم متشابه اند (دو زاویه ABD و KBC با هم و دو زاویه ADB و BCK با هم برابرند). بنابراین

$$\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}$$

و یا

$$AD \cdot BC = KC \cdot BD \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = (AK + KC)BD$$

و یا

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

*

کلود بطلمیوس (مرگ در حدود سال ۱۶۸ میلادی)، یکی از دانشمندان یونان باستان است که بررسی‌های او، اهمیت زیادی برای پیشرفت رشته‌های مختلف دانش (ریاضیات، فیزیک، هندسه و، به خصوص، اخترشناسی) داشته است. بطلمیوس، در تألیف اساسی خود «ساختمان بزرگ ریاضی اخترشناسی درسیزده کتاب» (المجسطی)، کوشیده است تا برای دستگاه زمین مرکزی، که طبق آن زمین در مرکز و بدون حرکت قرار گرفته است و خورشید و سیاره‌ها به دور آن می‌چرخند، مبانی ریاضی محکمی بریزد. دستگاه بطلمیوسی، در طول نزدیک به ۱۲ سده، بر جهان دانش حکومت می‌کرد، تا این که نیکلای کوپرنیک (۱۴۷۳-۱۵۴۳)، اخترشناس لهستانی، دستگاه خورشید مرکزی، که منعکس‌کننده واقعیت جهان بود، پایه‌گذاری کرد. در دستگاه کوپرنیکی، زمین، نه تنها به دور محور خود، بلکه ضمناً در فضا و به دور خورشید هم می‌چرخد.

در «المجسطی»، دستگاه ریاضی اخترشناسی (مثلثات خطی و کروی، جدول سینوس‌ها) داده شده است.

۴۳. با توجه به شرط‌های مسأله، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{3}z \\ y - z = \frac{1}{3}x \\ z - 10 = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

که با حل آن، به دست می آید:

$$x = 45, \quad y = 37\frac{1}{2}, \quad z = 22\frac{1}{2}$$

(همه مسأله‌های دیوفانت را، با علامت گذاری‌های امروزی حل کرده‌ایم).

۴۴. از معادله $x + y = 10$ به دست می آید:

$$\frac{x+y}{2} = 5$$

اکنون فرض می کنیم:

$$\frac{x+y}{2} = z$$

با جمع این دو رابطه، به دست می آید:

$$x = 5 + z$$

واز تفاضل دو رابطه

$$y = 5 - z$$

در این صورت، داریم:

$$x^2 + y^2 = (5+z)^2 + (5-z)^2 = 50 + 2z^2$$

که باتوجه به معادله دوم دستگاه

$$2z^2 = 18 \Rightarrow z = 3$$

و دیگر به سادگی مقدارهای x و y به دست می آید:

$$x = 5 + z = 8, \quad y = 5 - z = 2$$

۴۵. اگر ضلع پهلوی زاویه قائمه را که مکعب کامل است x^3 بگیریم،

ضلع دوم پهلوی زاویه قائمه برابر $x^3 - x$ و وتر مثلث برابر $x^2 + x$

می شود و، در نتیجه، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{(x^2+x)^2 - (x^2-x)^2} = x^2$$

که از آن جا به دست می آید:

$$2x^2 = x^2$$

در نتیجه، $x=2$ ، یعنی وتر برابر ۱۰ و دو ضلع پهلوی زاویه قائمه، به ترتیب، برابر ۶ و ۸ می شود.

۴۶. بخش کوچکتر تقسیم دوم را x می گیریم، در این صورت، بخش بزرگتر تقسیم اول برابر x ۲ می شود. بخش کوچکتر تقسیم اول، برابر $2x-100$ و، در نتیجه، بخش بزرگتر تقسیم دوم $6x-300$ خواهد شد. ولی، مجموع دو بخش تقسیم دوم، برابر است با ۱۰۰:

$$x + (300 - 6x) = 100$$

و از آن جا: $x=40$.

پاسخ: در تقسیم اول: بخش کوچکتر برابر ۲۰ و بخش بزرگتر برابر ۸۰ است، و در تقسیم دوم: بخش کوچکتر برابر ۴۰ و بخش بزرگتر برابر ۶۰ است. ۴۷. اگر تفاضل دو عدد را $2x$ بگیریم، عدد بزرگتر برابر $10+x$ و عدد کوچکتر برابر $10-x$ می شود. از طرف دیگر، بنا بر فرض، باید داشته باشیم:

$$(10+x)(10-x) = 96,$$

$$100 - x^2 = 96,$$

$$x^2 = 4$$

و از آن جا $x=2$ و دو عدد برابر ۱۲ و ۸ می شود.

۴۸. مسأله، منجر به حل این دستگاه می شود:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x^2 + y^2}{x + y} = 5 \end{cases}$$

گر دو طرف معادله اول را مجذور و، سپس، به دو طرف برابری حاصل، يك احد اضافه کنیم، به دست می آید:

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2} = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10y^2$$

در نتیجه: معادله دوم دستگاه، چنین می شود:

$$\frac{10y^2}{x+y} = 5 \Rightarrow 10y^2 = 5(x+y)$$

که اگر به جای x ، مقدار آن، یعنی $3y$ را قرار دهیم، به دست می آید:

$$10y^2 = 5(3y+y) \Rightarrow 10y^2 = 20y$$

از آن جا $y=2$ و، بنابراین، $x=6$ می شود.

۴۹. مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases} (x+y)z=35 \\ (x+z)y=27 \\ (y+z)x=32 \end{cases}$$

اگر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم، به دست می آید:

$$xz - xy = 8$$

برابری اخیر را با معادله سوم، جمع می کنیم:

$$xy = 20$$

که از آن جا، به سادگی پیدا می شود:

$$xy = 12, \quad yz = 15$$

از ضرب $xz=20$ و $yz=15$ در یکدیگر، به دست می آید:

$$xyz^2 = 300 \Rightarrow 12z^2 = 300$$

از آن جا: $z=5$ و بنابراین: $x=4$ و $y=3$.

۵۰. عدد نخست را به صورت حاصل ضرب x در مکعب يك عدد،

مثلاً ۲، در نظر می گیریم. به این ترتیب، عدد نخست برابر $8x$ می شود.

عدد دوم را برابر $x^2 - 1$ فرض می کنیم. روشن است که، به این ترتیب،

یکی از شرط های مسأله برقرار است: حاصل ضرب دو عدد به اضافه عدد نخست،

يك مكعب كامل می شود. در واقع، داریم:

$$8x(x^2 - 1) + 8x = 8x^3$$

سپس، بنابر شرط دوم، باید حاصل ضرب دو عدد به اضافه عدد دوم،

برابر مكعب يك عدد باشد. یعنی باید عدد

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)$$

برابر بامكعب يك عدد باشد.

فرض می کنیم که، این عدد، برابر $(2x-1)^3$ باشد، آن وقت، به معادله زیر می رسمیم:

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)=(2x-1)^3$$

$$\text{از آن جا: } x = \frac{14}{13}$$

به این ترتیب، عدد نخست برابر $8 \times \frac{14}{13}$ ، یعنی $\frac{112}{13}$ و عدد دوم

$$\text{برابر } 1 - \left(\frac{14}{13}\right)^2 \text{ یعنی } \frac{27}{169} \text{ خواهد شد.}$$

یادآوری می کنیم که، این مسأله، از جمله معادله های سیال به حساب می آید و جواب های زیادی دارد. با وجود این، دیوفانت، برای رسیدن به یکی از جواب ها، معادله دوم را طوری در نظر می گیرد که جمله های درجه سوم آن حذف شوند.

۵۱. فرض می کنیم، مجموع سه عدد، چنین باشد:

$$x+y+z=u^2+2u+1=(u+1)^2$$

سپس، فرض می کنیم: $x+y=u^2$ ، از آن جا $z=2u+1$ اکنون فرض می کنیم

$$y+z=u^2-2u+1=(u-1)^2$$

از این جا به دست می آید: $x=4u$ و $y=u^2-4u$ و $x+z=6u+1$ ، هم باید مجذور کامل باشد. مثلاً آن را برابر $121=11^2$ می گیریم. بنابراین، برای پیدا کردن u ، به این معادله می رسمیم:

$$6u+1=121$$

$$\text{واز آن جا، } u=20.$$

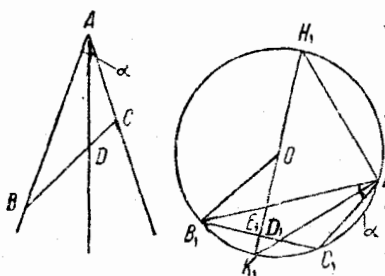
سه عدد مورد نظر، چنین اند:

$$x=80, y=320, z=41$$

۵۲. بنا بر فرض مسأله، يك زاویه، نیمساز آن و نقطه ای واقع بر این

نیمساز داده شده است. باید پاره خط BC را طوری رسم کنیم (شکل ۲۴)، که طولی به اندازه مقدار مفروض داشته باشد.

برای این منظور، ابتدا مثلث ABC را می سازیم، به نحوی که زاویه A، قاعده BC و نیمساز AD از آن،



شکل ۲۴

به ترتیب، برابر زاویه و طول های مفروض باشند. برای این منظور، پاره خط B_1C_1 را برابر با پاره خط BC رسم می کنیم. سپس، از دو نقطه B_1 و C_1 دایره ای می گذرانیم که کمان B_1C_1 آن، کمان درخور α (برابر زاویه A) باشد. اگر از نقطه E_1 وسط وتر B_1C_1 عمودی بر این وتر اخراج کنیم، قطر K_1H_1 از دایره به دست می آید. مسأله، به این جا منجر می شود که بتوانیم وتر K_1A_1 را (که ضمناً نیمساز زاویه A_1 می شود)، طوری رسم کنیم که D_1A_1 برابر با DA بشود. دو مثلث $A_1K_1H_1$ و $E_1K_1D_1$ را در نظر می گیریم. به سادگی معلوم می شود که این دو مثلث متشابه اند و، بنابراین، داریم:

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1} = \frac{K_1E_1}{K_1A_1}$$

یا

$$K_1D_1 \cdot K_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1$$

که اگر به برابری $K_1A_1 = K_1D_1 + D_1A_1$ توجه کنیم، به دست می آید:

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1$$

در مثلث قائم الزاویه $H_1C_1K_1$ می توان نوشت:

$$H_1K_1 \cdot E_1K_1 = (C_1K_1)^2$$

بنابراین، به دست می آید:

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = (C_1K_1)^2$$

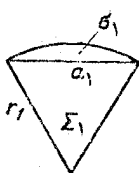
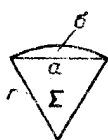
که اگر فرض کنیم: $K_1D_1 = x$ ، $A_1D_1 = p$ و $C_1K_1 = q$ ، خواهیم

$$x^2 + px = q^2$$

اگر x را از زوی این معادله بسازیم؛ مثلث $A_1B_1C_1$ بدون هیچ زحمتی، باهمان نیمساز خود، A_1D_1 ، به دست می آید. در واقع، به کمک پرگاری که به اندازه $K_1D_1 = x$ باز شده باشد، نقطه D_1 را به دست می آوریم. آن وقت، K_1D_1 را وصل می کنیم و ادامه می دهیم تا دایره را در نقطه A_1 قطع کند. به این ترتیب، مثلث $A_1B_1C_1$ به دست می آید. اکنون کافی است، روی ضلع زاویه مفروض A ، طول AB را برابر A_1B_1 جدا و BD را وصل کنیم.

*

پاپوس اسکندرانی، هندسه دان یونان قدیم، در نیمه دوم سده سوم میلادی می زیست. پاپوس، مؤلف اثر مشهور «مجموعه ریاضیات» در کتاب است؛ که از آن ها، کتاب آخر و قسمتی از کتاب دوم به ما رسیده است. در «مجموعه ریاضیات»، مجموعه جالب و بکری از کشف های ریاضی دانان یونان باستان، درباره هندسه و حساب گرد آمده است. در این اثر، از بسیاری رساله های ریاضی دانان یونان باستان نام برده شده است که اصل آن ها، به ما نرسیده است.



شکل ۲۵

۵۳. مساحت قطعه ها را σ و σ_1 ، مساحت قطاع ها را S و S_1 و مساحت مثلث ها را Σ و Σ_1 می گیریم (شکل ۲۵) a و a_1 را قاعده های دو قطعه و r و r_1 را شعاع های دو دایره فرض می کنیم. در این صورت، داریم:

$$\sigma = S - \Sigma, \quad \sigma_1 = S_1 - \Sigma_1$$

باتوجه به تشابه مثلث ها، خواهیم داشت:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

از آن جا

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{S}{S_1}$$

یا

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{\Sigma_1}{S_1}, \quad \frac{S}{\Sigma} = \frac{S_1}{\Sigma_1}$$

بنابراین

$$\frac{S - \Sigma}{\Sigma} = \frac{S_1 - \Sigma_1}{\Sigma_1}$$

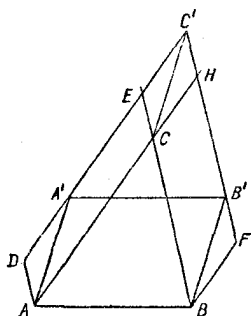
یا

$$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\sigma_1}{\Sigma_1} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\Sigma}{\Sigma_1}$$

و براساس همه این ها، سرانجام به دست می آید:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

۵۴. مثلث دلخواه ABC را در نظر می گیریم و روی ضلع AB و در سمت درون مثلث، متوازی الاضلاع A'B' را می سازیم، به نحوی که



شکل ۲۶

راس های A' و B' آن در بیرون مثلث واقع شوند (شکل ۲۶). سپس، روی دو ضلع دیگر مثلث، دو متوازی الاضلاع ACED و BFHC را طوری می سازیم که ضلع های آنها، از راس های متوازی الاضلاع اول بگذرند. باید ثابت کنیم که مساحت متوازی الاضلاع ABB'A' برابر است با مجموع

مساحت های دو متوازی الاضلاع ACED و BFHC. برای این منظور،

ضلع‌های DE و FH را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه C' قطع کنند، بعد C' را به C وصل می‌کنیم. قبلاً یاد آوری می‌کنیم که دو مثلث ABC و A'B'C' برابرند، زیرا یک ضلع و دو زاویه برابر دارند ($\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ و $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ ، $AB = A'B'$) مساحت متوازی‌الاضلاع ACC'A' با مساحت متوازی‌الاضلاع ACED و مساحت متوازی‌الاضلاع BB'C'C با مساحت متوازی‌الاضلاع BFHC برابر است، زیرا در هر دو مورد، قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر دارند.

اکنون اگر از شکل ABB'C'A'A، مثلث A'B'C' را برداریم، متوازی‌الاضلاع ABB'A' باقی می‌ماند. همین‌طور، اگر از همان شکل ABB'C'A'A، مثلث ABC را، که با مثلث A'B'C' برابر است برداریم، مجموع متوازی‌الاضلاع‌های ACC'A' و BB'C'C، و یا هم‌ارز آن‌ها، مجموع متوازی‌الاضلاع‌های ACED و AFHC باقی می‌ماند. مساله حل شد. (این مساله در «نیکوماکوس» ارشمیدس وجود ندارد و آن را، برای نخستین بار، در «مجموعه ریاضیات» پاپوس اسکندرانی پیدا کردند. مساله پاپوس، تعمیمی از قضیه فیثاغورث است. در واقع اگر در مساله پاپوس، مثلث اصلی را، یک مثلث قائم‌الزاویه بگیریم، به حالت خاص قضیه فیثاغورث می‌رسیم.)

۵۵. مساله، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

که با حل آن به دست می‌آید: $x = 28$ بنابراین، در مکتب فیثاغورث، ۲۸ شاگرد درس می‌خوانده‌اند.

«جنگ یونانی»، مجموعه‌ای از مساله‌ها است که به صورت شعر و، عموماً، همچون «ایلیاد» و «اودیسه» هومر، شش بخشی است.

۵۶. فرض می‌کنیم، الاغ x کیسه و قاطر y کیسه بار بر پشت خود داشته باشند. به این دستگاه، شامل دو معادله دو مجهولی، می‌رسیم:

$$\begin{cases} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ y-x=2 \end{cases}$$

باحل این دستگاه به دست می آید:

$$x=5, \quad y=7$$

۵۷. مساله، منجر به حل این معادله می شود:

$$\frac{4}{3}x + x = 12$$

و از آن جا

$$x = 5\frac{1}{7}$$

یعنی $5\frac{1}{7}$ ساعت از روز گذشته است.

۵۸. شرط های مساله، منجر به این معادله می شود:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

که با حل آن به دست می آید: $x = 84$. دیوفانت در ۸۴ سالگی جهان را ترک گفته است.

*

در باره زندگی «متروودور» چیزی نمی دانیم حتی نمی دانیم کسی به دنیا آمده و کی از دنیا رفته است. او در تاریخ ریاضی، به عنوان مولف مساله هایی که به شعر تنظیم شده، شناخته شده است. مساله های متروودور، در مجموعه های دست نویس وارد شده است و در زمان خود، صاحب شهرت فراوانی بوده است.

۴. مسأله‌های چینی

یادداشت تاریخی

ریاضیات، زمینه و سابقه‌ای طولانی در فرهنگ چین دارد. بسیاری از کشف‌ها، چه در زمینه دانش و چه در زمینه صنعت، خیلی قبل از سایر کشورها، در چین و به وسیله دانشمندان چینی، انجام گرفته است.

دانشمندان چینی، برای نخستین بار در تاریخ صنعت جهان، قطب‌نما (سده سوم پیش از میلاد)، زلزله‌نگار (سده دوم پیش از میلاد) و سرعت‌سنج را کشف کردند. مردم چین، خیلی پیش از اروپائی‌ها طرز تهیه شوره را، برای به دست آوردن باروت، می‌دانستند (سده دهم). استادکاران چینی، حتی در سده هفتم پیش از میلاد، از راه تهیه ظرف‌های چینی با خبر بودند. همه می‌دانند که چین زادگاه ابریشم و انواع رنگها و روغن‌های رنگی است. در سده یازدهم «بی‌شن» آهنگر، وسیله‌ای برای چاپ درست کرد که، با آنچه ما امروز داریم، تفاوت کمی دارد.

اخترشناسی توضیحی، یعنی دانش جسم‌های آسمانی، و تقویم، در چین به وجود آمد. دانشمندان چینی، در ژرفای تاریخ، کار مشاهده منظم آسمان را آغاز کردند و به ثبت موقعیت‌ها و حرکت ستاره‌ها پرداختند. «شی‌شن»، اخترشناس چینی، در سده چهارم پیش از میلاد، نخستین سیاهه ستارگان را تنظیم کرد. در جدول «شی‌شن»، شرح ۸۵۰ ستاره داده شده است. در اروپا، چنین سیاهه‌ای، تنها در سده دوم میلادی تنظیم شد (کاتالوگ هیپارک).

اخترشناسان چینی، برای انجام مشاهده‌های خود، ساختمان‌های مجهزی

داشتند که آن‌ها را رصدخانه می‌گفتند. بنائی که به نام رصدخانه پکن در حال حاضر وجود دارد، با ابزارهای قدیمی آن، در سال ۱۲۷۹ میلادی، در حومه پکن، ساخته شده است.

(مساله‌ها و حل آن‌ها را، که در این جا آمده است، از رساله‌های چینی برداشته‌ایم، منتهی بیان آن‌ها را با علامت‌های امروزی داده‌ایم).

حل مساله‌ها

۵۹. حل مساله، منجر به دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = 8 \end{cases}$$

که با حل آن، به دست می‌آید.

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{4}$$

یعنی، هر گاو ۲ «تاول» و هر گوسفند $\frac{1}{4}$ «تاول» می‌ارزند.

*

رساله «نه فصل از هنر محاسبه» (کیوچانک)، رساله‌ای خیلی قدیمی است. این رساله، شامل قانون‌هایی از ریاضیات و مساله‌های گوناگونی در کاربرد این قانون‌هاست. در این رساله، مساله‌هایی آمده است که خصلت عملی دارند و بیشتر مربوط به کشاورزی و محاسبه حجم‌ها هستند.

۶۵. این مساله، منجر به معادله‌ای سیال می‌شود که باید جواب‌های درست آن را به دست آورد. به زبان ریاضیات امروزی، مساله به این ترتیب حل می‌شود: فرض می‌کنیم، x بار با بیلچه، y بار با کفش چوبی و z بار با کسه، برنج برداشته باشند. در این صورت، شرط‌های مساله، منجر به دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1$$

که از آن جا، به این معادله سیال می‌رسیم:

$$19x = 12z \Rightarrow x = \frac{12z}{19}$$

چون x و y و z ، عددهایی درست هستند، می توان فرض کرد:

$$z = 19t$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$17y + 13 = 228t$$

کوچکترین عدد درستی که می توان برای t انتخاب کرد تا y هم عدد درست بشود، برابر است با ۱۴، که، در نتیجه، خواهیم داشت:

$$x = 168, y = 187, z = 265$$

بنابراین، اولی ۳ «شی»، ۱ «تااو»، ۹ «شینگ» و ۲ «هو»؛ دومی ۳ «شی»، ۱ «تااو»، ۷ «شینگ» و ۹ «هو»؛ و سومی ۳ «شی»، ۱ «تااو»، ۹ «شینگ» و ۲ «هو» برنج برداشته اند.

۶۱. مساله، منجر به حل دستگاهی از سه معادله سه مجهولی می شود:

$$\begin{cases} a+b+c=p, \\ a^2+b^2=c^2, \\ a \cdot b = 2s \end{cases}$$

که در آن، a ، b و c طول ضلع ها، p اندازه محیط و S اندازه مساحت مثلث مفروض اند.

از معادله های دوم و سوم به دست می آید:

$$(a+b)^2 = 4s + c^2 \Rightarrow (p-c)^2 = 4s + c^2$$

که اگر آن را نسبت به c حل کنیم، به دست می آید:

$$c = \frac{p^2 - 4s}{2p}$$

در نتیجه، با توجه به معادله اول، خواهیم داشت:

$$a+b = \frac{p^2 + 4s}{2p}$$

اگر این معادله را با معادله سوم در نظر بگیریم، به معادله درجه دومی می رسیم که a و b ریشه های آن خواهند بود:

$$x^2 - \frac{p^2 + 4s}{2p}x + 2s = 0$$

*

رساله «آغاز هنر محاسبه»، در سال ۱۵۹۳ چاپ شد. در این رساله، قاعده‌های مهمی وجود دارد که، احتمالاً برای این که بهتر به خاطر بماند، به صورت شعر تنظیم شده است. ظاهراً، از این کتاب، در زمان خودش، به عنوان یک کتاب درسی، در مدرسه‌های ریاضیات مقدماتی، استفاده می‌کرده‌اند. محتوی این کتاب، طرح خوبی از وضع ریاضیات چین، در اواخر سده شانزدهم، به دست می‌دهد.

۶۲. «سون تزی» مساله خود را به این ترتیب حل می‌کند: «در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۲ رسیده‌ایم، بنابراین، آن را ۱۴۰ بگیریم. در تقسیم بر ۵ به باقی مانده ۳ رسیده‌اید، بنابراین، آن را ۶۳ بگیریم. در تقسیم بر ۷ به باقی مانده ۲ رسیده‌اید، بنابراین، آن را ۳۰ بگیریم. از جمع این‌ها، عدد ۲۳۳ پیدا می‌شود. از این عدد ۲۱۰ را کم کنید، جواب به دست می‌آید».

مساله «سون تزی» را می‌توان با روش ساده‌ای حل کرد. حل آن، منجر به دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ x = 5z + 3 \\ x = 7u + 2 \end{cases}$$

و یا

$$3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2$$

و از آن‌جا

$$3y = 7u \Rightarrow y = \frac{7u}{3}$$

اگر t را عددی درست و $u = 3t$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$y = 7t$$

و از آن‌جا

$$x = 21t + 2$$

بنابراین

$$21t + 2 = 5z + 3 \Rightarrow 21t - 5z = 1$$

با روش جست و جو می‌توان یکی از جواب‌های t و z را در معادله سیال
 اخیر پیدا کرد: $t = 1$, $z = 4$ در این صورت، شکل کلی جواب‌های این معادله،
 چنین است:

$$t = 1 + 5q, \quad z = 4 + 21q$$

که در آن، $q = 0, 1, 2, \dots$

چون داریم: $x = 21t + 2$ ، خواهیم داشت: $x = 23 + 105q$ ، که
 در آن، q می‌تواند برابر صفر یا هر عدد درست مثبت باشد. کوچکترین مقدار
 x ، به ازای $q = 0$ ، به دست می‌آید: $x = 23$. اگر $q = 1$ باشد $x = 128$
 و اگر $q = 2$ باشد، $x = 233$ و اگر $q = 3$ باشد، $x = 338$ می‌شود
 و غیره.

۶۳. خود رساله، مساله را این‌طور حل کرده است: «معلوم کنید،
 ۱۰۰۰۰ «هو» نمک، چند «چی» می‌شود. این را مقسوم بگیرد. با ضرب طول
 و عرض در یکدیگر، مقسوم علیه را پیدا کنید. با در دست داشتن مقسوم و
 مقسوم علیه، ارتفاع انبار بر حسب «چی» به دست می‌آید».
 برای حل مساله، باید توجه داشت:

$$۱ \text{ «چژان»} = ۱۰ \text{ «چی»}$$

$$۱ \text{ «هو»} = ۵۱/۷۷۵ \text{ «لیتر»}$$

$$۲۷ \text{ «چژان مکعب»} = ۱۰۰۰۰ \text{ «هو»}$$

۶۴. تنظیم کننده رساله، برای حل مساله به ذکر قاعده اکتفا می‌کند؛
 ۴ «شه‌نا» را بر بند پایینی تقسیم می‌کنیم؛ ۳ «شه‌نا» را بر بند بالایی تقسیم
 می‌کنیم. عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم می‌کنیم، مقسوم به دست می‌آید.
 مجموع نصف ۴ بند و ۳ بند را از کل ۶ بند کم می‌کنیم، مقسوم علیه پیدا
 می‌شود. تقسیم را انجام می‌دهیم. مقدار مجهول پیدا می‌شود، یعنی معلوم
 می‌شود که هر بند با بند مجاور خود، چقدر اختلاف دارد. حد متوسط حجم
 سه بند پایینی، همان حجم بند دوم است.

بنابراین قاعده، باید این محاسبه‌ها را انجام داد:

$$۱. \frac{7}{12} = \frac{3}{4} - \frac{4}{3}, \text{ این مقسوم؛}$$

$$۰.۲ = \frac{۱۱}{۲} - \frac{۳}{۲} - \frac{۴}{۲}، \text{ این مقسوم علیه؛}$$

$$۰.۳ = d = \frac{۷}{۶۶} = \frac{۱۱}{۲} : \frac{۷}{۱۲}، \text{ یعنی مقداری که هر بند با بند مجاور خود}$$

اختلاف دارد؛

$$۴. \text{ حجم بند دوم از پایین برابر } ۱\frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۳} \text{ «شه‌نا» است. اکنون دیگر،}$$

بدون هیچ اشکالی، می‌توان حجم هر کدام از هشت قسمت دیگر را پیدا کرد.

۶۵. نویسنده رساله راهنمایی می‌کند که مساله را باید به این ترتیب

حل کرد: «فرض می‌کنیم وزن هر شمش طلا، برابر ۳ «تسه‌زین» باشد، در این

صورت، وزن هر شمش نقره برابر $۲\frac{۵}{۱۱}$ «تسه‌زین» می‌شود. کمبود نسبت به

واقعیت برابر است با ۴۹ (در سطر راست). حالا فرض می‌کنیم، وزن یک شمش

طلا برابر ۲ «تسه‌زین» باشد، در این صورت، وزن یک شمش نقره، برابر

$۱\frac{۱}{۱۱}$ «تسه‌زین» می‌شود. با واقعیت، اضافه‌ای به اندازه ۱۵ پیدا می‌شود (در

سطر چپ). هر مخرج را در مقدار مربوطه خودش در این سطرها ضرب می‌کنیم.

اضافی و کمبود را به طور طبیعی در مقدارهای فرضی ضرب می‌کنیم. جمع آن‌ها،

مقسوم را تشکیل می‌دهد. اضافی و کمبود را جمع می‌کنیم، مقسوم علیه

به دست می‌آید. تقسیم را انجام می‌دهیم، وزن شمش طلا پیدا می‌شود. مخرج

را در مقسوم علیه ضرب می‌کنیم، مقسوم را به آن تقسیم می‌کنیم، وزن شمش

نقره پیدا می‌شود. ساده کنید، کسر مورد نظر را پیدا می‌کنید».

در رساله خود جواب داده نشده است. ولی ما، با دنبال کردن همین

قاعده‌ای که در رساله ذکر شده است، جواب را پیدا می‌کنیم. قبلاً یادآوری

می‌کنیم که

$$۱ \text{ «تسه‌زین»} = ۱۶ \text{ «لان»}$$

$$۱ \text{ «لان»} = ۲۴ \text{ «چزو»}$$

وزن شمش طلا را x و وزن شمش نقره را z می‌گیریم. مساله منجر

به حل دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases} 9x = 11z \\ 13 + 8x + z = 10z + x \end{cases}$$

این دستگاه را با «قاعده دوفرضی» حل می کنیم.

فرض اول: $x_1 = 3$ «تسه زین». در این صورت

$$z_1 = \frac{9x_1}{11} = \frac{9 \times 3}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11} \text{ «تسه زین»}$$

اکنون «کمبود سطر راست» را پیدا می کنیم [یعنی، ببینیم در معادله دوم دستگاه، مقدار سمت راست تساوی، چقدر نسبت به مقدار سمت چپ، اختلاف پیدا می کند؛ ضمناً، همه وزن ها را بر حسب «تسه زین» می نویسیم (مترجم)]. این مقدار را y_1 می نامیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{13}{16} + 8 \times 3 + 2\frac{5}{11} \right) - \left(10 \times 2\frac{5}{11} + 3 \right) = \\ &= 27\frac{47}{11 \times 16} - 27\frac{96}{11 \times 16} = \frac{49}{11 \times 16} \end{aligned}$$

فرض دوم: $x_2 = 2$ «تسه زین». در این حالت $z = 1\frac{7}{11}$ «تسه زین» و

«اضافی سطر چپ» برابر است با

$$\begin{aligned} y_2 &= \left(\frac{13}{16} + 1\frac{7}{11} + 8 \times 2 \right) - \left(10 \times 1\frac{7}{11} + 2 \right) = \\ &= 18\frac{79}{11 \times 16} - 18\frac{64}{11 \times 16} = \frac{15}{11 \times 16} \end{aligned}$$

اکنون، y_1 و y_2 را، همراه با x_1 و x_2 ، باروش چینی می نویسیم:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

ستون سمت چپ، همان «سطر چپ» و ستون سمت راست، همان «سطر راست» است. از این جدول، بنابر قاعده، به دست می آید:

$$x = \frac{2 \times \frac{49}{11 \times 16} + 3 \times \frac{15}{11 \times 16}}{\frac{49}{11 \times 16} + \frac{15}{11 \times 16}} = \frac{2 \times 49 + 3 \times 15}{49 + 15} =$$

$$= \frac{143}{64} = 2 \frac{15}{64} \text{ «تسه‌زین»}$$

بنابراین، مقدار x برابر است با ۲ «تسه‌زین»، ۳ «لان» و ۸ «چژو».
وزن شمش نقره، خیلی ساده به‌دست می‌آید. برای این منظور، مقسوم

۱۴۳ بر حاصل‌ضرب مقسوم علیه ۶۴ و مخرج $\frac{11}{9}$ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$z = \frac{x}{\frac{11}{9}} = \frac{143}{\frac{11}{9} \times 64} = \frac{13 \times 9}{64} = \frac{117}{64} = 1 \frac{53}{64} \text{ «تسه‌زین»}$$

بنابراین، مقدار z برابر است با ۱ «تسه‌زین»، ۱۳ «لان» و ۵۳ «چژو».

۶۶. نویسنده رساله، برای حل مساله، این قاعده را پیشنهاد می‌کند:
«فرض می‌کنیم بعد از ۱۵ روز به هم رسیده باشند. در این صورت، کمبودی برابر ۳۳۷ و نیم «لی» خواهیم داشت. ولی اگر فرض کنیم بعد از ۱۶ روز به هم رسیده باشند، در این صورت، اضافه‌ای برابر ۱۴ «لی» به‌دست می‌آید. اضافه و کمبود را به‌طور طبیعی در مقادیرهای فرضی ضرب کن، از جمع آن‌ها مقسوم‌رأ پیدا می‌کنی. اضافه و کمبود را با هم جمع کن، مقسوم‌علیه را خواهی داشت. عمل تقسیم را انجام بده، تعداد روزها را به‌دست می‌آوری.»

راهی که اسب راه وار در n روز طی می‌کند، عبارت است از

$$\begin{aligned} & 193 + (193 + 13) + (193 + 2 \times 13) + \dots + \\ & + [193 + (n-1)13] = 193n + [13 + 2 \times 13 + \dots + \\ & + (n-1)13] = 193n + 13[1 + 2 + \dots + (n-1)] = \\ & = 193n + 13 \times \frac{n(n-1)}{2} \text{ «لی»} \end{aligned}$$

و راهی که اسب کم زور در همین مدت می‌رود، چنین است:

$$97 + \left(97 - \frac{1}{2}\right) + \left(97 - 2 \times \frac{1}{2}\right) + \dots + \left[97 - (n-1) \times \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 97n - \frac{1}{2} [1 + 2 + \dots + (n-1)] = 97n - \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{«لی»}$$

مجموع راهی که دواسب رفته‌اند، چنین است:

$$193n + 13 \times \frac{n(n-1)}{2} + 97n - \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= 290n + \left(13 - \frac{1}{2}\right) \frac{n(n-1)}{2} = 290n + \frac{1}{4}(n^2 - n)$$

که باید برابر ۶۰۰۰ «لی» باشد.

برای ادامه حل مساله، با توجه به قاعده‌ای که در بالا دیدم، از روش «دو فرضی» استفاده می‌کنیم.

به ازای $n = 15$ ، کمبود برابر است با

$$6000 - 5662\frac{1}{2} = 337\frac{1}{2} \quad \text{«لی»}$$

و به ازای $n = 16$ اضافه‌ای خواهیم داشت برابر با

$$6140 - 6000 = 140 \quad \text{«لی»}$$

اگر فاصله زمانی لازم، برای رسیدن دواسب به هم، را برابر x بگیریم و فرض کنیم که، در جریان روز، سرعت‌های آن‌ها ثابت می‌ماند، داریم:

$$x = \frac{15 \times 140 + 16 \times 337\frac{1}{2}}{140 + 337\frac{1}{2}} = 15 \frac{135}{191}$$

حالا دیگر، بدون هیچ اشکالی، می‌توان محاسبه کرد که هر کدام از

اسب‌ها، در مدت $15 \frac{135}{191}$ روز، چقدر راه رفته‌اند؟

از حل این مساله معلوم می‌شود که، مولف آن، از رابطه مربوط به مجموع جمله‌های تصاعد حسابی

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

آگاهی داشته است، اگرچه در خود مسأله، یادی از آن نکرده است. ۶۷. در رساله، این مسأله، به کمک روش «فان چن» حل شده است که ما، کمی بعد، با آن آشنا خواهیم شد.

روشن است که حل مسأله، منجر به حل این دستگاه می شود:

$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$$

۶۸. مسأله را از رساله هشتم کتاب برداشته ایم. برای حل آن (در رساله، جواب مسأله داده نشده است)، مولف توصیه می کند که از قاعده «فان چن» استفاده شود: «۳ خرمن خوب، ۲ خرمن بامحصول متوسط و ۱ خرمن بامحصول بد را با ۳۹ «دواو» در طرف راست قرار بده، در سمت چپ آن، مقدار محصولها و وزن آنها را به همان ردیف سمت راست بگذار و همین طور ستون بعدی را. عددهای ستون وسط را در تعداد خرمن خوب در ستون سمت راست ضرب کن و باقی مانده ها را تشکیل بده. دوباره باقی مانده ها را تشکیل بده و، این عمل را، آن قدر ادامه بده تا چیزی از خرمن خوب در ستون وسط باقی نماند. دوباره باقی مانده ها را تشکیل بده تا چیزی جز تعداد خرمن بد در ستون سمت چپ باقی نماند. عدد بالا مقسوم علیه و عدد پایین مقسوم، برای خرمن بامحصول بد است. برای این که مقسوم را برای محصول متوسط به دست آوریم، عدد پایین ستون وسط را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم محصول بد را از آن کم می کنیم. باقی مانده را برای محصول متوسط در نظر می گیریم. این می شود مقسوم برای محصول متوسط. برای پیدا کردن مقسوم محصول خوب، عدد پایین ستون سمت راست را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم های مربوط به محصول بد و محصول متوسط را از آن کم می کنیم، باقی مانده را برای مقدار محصول خوب در نظر می گیریم، این می شود مقسوم برای محصول خوب. همه مقسوم ها را با مقسوم علیه عمل می کنیم، مقدار محصول بر حسب «دواو» به دست می آید».

مساله، منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

در رسالهٔ چینی، این دستگاه را این طور نشان داده است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

بنابر قاعده‌ای که در رساله آمده است، باید جدول را به این ترتیب،

عمل کرد:

(۱) عددهای ستون وسط را در تعداد خرمن‌های با محصول خوب در

ستون سمت راست ضرب کن:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}$$

(۲) باقی مانده را تشکیل بده، دوباره باقی مانده را تشکیل بده و این

عمل را، تا آن جا ادامه بده که چیزی از خرمن‌های خوب در ستون وسط

باقی نماند

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

(۳) دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده، تا چیزی جز محصول بد در

ستون چپ باقی نماند [در این جا، ابتدا عددهای ستون چپ، در تعداد خرمن‌های

با محصول خوب از ستون سمت راست ضرب شده‌اند، سپس، در هر سطر عدد ستون راست از عدد نظیر ستون چپ کم شده است و باقی‌مانده‌ها در ستون چپ قرار گرفته‌اند. بعد، عددهای ستون چپ در عدد خرمن‌های با محصول متوسط از ستون وسط ضرب شده‌اند و پشت سر هم، عددهای ستون وسط از آن‌ها کم شده‌اند]:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 133 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

(۴) عدد بالا [۳۶] مقسوم‌علیه و عدد پایین [۹۹] مقسوم، برای تعداد

خرمن‌های با محصول بد است

(۵) برای این که مقسوم را برای محصول متوسط به دست آوریم، عدد پایین ستون وسط را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم محصول بد را از آن کم می‌کنیم، باقی‌مانده را برای مقدار محصول متوسط در نظر می‌گیریم. این می‌شود مقسوم برای محصول متوسط.

بنابراین، «مقسوم» برای y می‌شود:

$$\frac{24 \times 36 - 99}{5} = A$$

(۶) برای پیدا کردن «مقسوم» محصول خوب، عدد پایین ستون سمت

راست را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم های مربوط به محصول بد و محصول متوسط را از آن کم می کنیم. باقی مانده را برای مقدار محصول خوب در نظر می گیریم. این می شود مقسوم برای محصول خوب

$$\frac{39 \times 36 - 99 - 2A}{3} = B$$

۷) همه مقسوم ها را با مقسوم علیه عمل می کنیم، مقدارهای محصول بر حسب «دواو» به دست می آید.
به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ «دواو»}$$

$$y = \frac{A}{36} = 4\frac{1}{4} \text{ «دواو»}$$

$$x = \frac{B}{36} = 9\frac{1}{4} \text{ «دواو»}$$

۶۹. مولف رساله، برای حل مساله، دو قاعده ذکر می کند.
قاعده اول: جدول «فان چن» را تشکیل بده و با روش «چژن فو» محاسبه کن.

مساله، منجر به حل این دستگاه معادله ها می شود:

$$\begin{cases} 2x = 1 - y \\ 3y = 1 - z \\ 4z = 1 - x \end{cases}$$

که قابل تبدیل به این صورت است:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 4z + x = 1 \end{cases}$$

و جدول متناظر «فان چن» برای آن، چنین است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

در همان آغاز جدول، گلوله‌هایی (جاهای خالی) وجود دارد.

قاعدهٔ دوم: «چژن‌فو»، یعنی جمع و تفریق عددهای منفی: «اگر علامت یکی باشد، از هم کم می‌شوند؛ اگر علامت یکی نباشد، جمع می‌شوند. اگر مثبت بدون زوج خود باشد، منفی می‌شود؛ اگر منفی بدون زوج خود باشد، مثبت می‌شود».

این قاعده را با علامت‌های امروزی، می‌توان این‌طور نوشت:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm(a - b),$$

$$(\pm a) - (\mp b) = \pm(a + b),$$

$$0 - (+b) = -b,$$

$$0 - (-b) = +b$$

قاعدهٔ جمع، در رساله، این‌طور شرح داده شده است: «اگر با علامت‌های مختلف باشند، از هم کم می‌شوند؛ اگر با یک علامت باشند، با هم جمع می‌شوند. اگر عدد مثبت بدون زوج باشد، مثبت می‌شود؛ اگر عدد منفی بدون زوج باشد، منفی می‌شود».

با علامت‌گذاری‌های جبری امروز، این قاعده چنین می‌شود:

$$(\mp a) + (\mp b) = \pm(a - b),$$

$$(\pm a) + (\pm b) = \pm(a + b),$$

$$0 + (+b) = +b,$$

$$0 + (-b) = -b$$

«چژن‌فو» از دو واژه ترکیب شده است: «چژن» یعنی قابل جمع، و «فو» یعنی قابل تفریق. این گونه عددها را با رنگ‌های مختلف نشان می‌دادند: «چژن» - قرمز و «فو» - سیاه.

بابه کاربردن قاعدهٔ «فان‌چن» در مورد این مساله، باید از ماتریس مفروض،

به طرف ماتریسی شامل صفرها، حرکت کرد. در این مساله، عددهای منفی هم ظاهر می شوند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۷۰. در رساله، این قاعده داده شده است: «جدول فان چن را تشکیل

بده. توجه کن، چیزهایی که وزن آنها به يك «دان» اضافه می شود (وزن

خرمن های مفروض)، منفی است. بعد با روش چژن فو محاسبه کن».

مساله، منجر به حل این دستگاه می شود:

$$\begin{cases} 2x = 1 + y \\ 3y = 1 + z \\ 4z = 1 + x \end{cases}$$

که به این صورت درمی آید:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y - z = 1 \\ 4z - x = 1 \end{cases}$$

و جدول متناظر آن چنین است:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۷۱. در رساله، این قاعده برای حل مساله داده شده است: «جدول

فان چن را تشکیل بده. توجه داشته باش: ۲ گاومیش و ۵ گوسفند مثبت،

۱۳ خوك منفی و باقی مانده «تسیان ها» مثبت است. همین طور بعد، ۳ گاومیش

مثبت، ۹ گوسفند منفی و ۳ خوك مثبت است. بالاخره، ۵ گاومیش منفی؛ ۶

گوسفند مثبت، ۸ خوک مثبت و کمبود «تسیان‌ها» منفی است. بنابراین بقاعده چژن فو محاسبه کن.»

اگر قیمت گاو میش، گوسفند و خوک را، به ترتیب، x ، y و z بگیریم، حل مسأله منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 13z = 1000 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \\ -5x + 6y + 8z = -600 \end{cases}$$

۷۲. در رساله، برای حل مساله، این طور راهنمایی شده است: «جدول فان‌چن را تشکیل بده و با روش چژن فو محاسبه کن». راهنمایی دیگری برای بحث و بررسی مساله داده نشده است.

به سادگی دیده می‌شود که، این مساله، منجر به دستگاه خطی از پنج معادله با شش مجهول می‌شود. این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} 2x + y = m \\ 3y + z = m \\ 4z + u = m \\ 5u + v = m \\ 6v + x = m \end{cases}$$

مجهول‌ها عبارتند از x ، y ، z ، u ، v و m . ضمناً جواب m را باید طوری گرفت که برای مقدارهای درست و مثبت x ، y ، z ، u و v ، حداقل ممکن باشد.

ماتریس اصلی دستگاه مفروض، چنین است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 76m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

و از آنجا

$$v = \frac{76}{721}m, \quad u = \frac{1}{721} \cdot \frac{721m - 76m}{5} = \frac{129}{721}m,$$

$$z = \frac{148}{721}m, \quad y = \frac{191}{721}m, \quad x = \frac{265}{721}m$$

و بنابراین، باید m را برابر ۷۲۱ گرفت.

۷۳. به سختی می توان زمانی را پیدا کرد که چینی ها، برای نخستین بار، از قانون مربوط به ضلع های مثلث قائم الزاویه، یعنی قضیه فیثاغورث، استفاده کرده اند. ولی این مطلب روشن است که، آن ها، از زمان هایی بسیار دور، با این قضیه آشنا بوده اند. آن طور که سندها گواهی می دهند، چینی ها در حدود ۲۲۰۰ سال پیش از میلاد، از قضیه فیثاغورث، در مورد مثلثی که ضلع های آن ۳ و ۴ و ۵ باشد، آگاهی داشتند.

در «ریاضیات در نه کتاب»، از قضیه فیثاغورث، به نام «هواوهو» نام برده شده است. طبق این قاعده، می توان با معلوم بودن وتر و یک ضلع مجاور به زاویه قائمه، ضلع دیگر مثلث قائم الزاویه را به دست آورد. همچنین، می توان وتر را، با معلوم بودن دو ضلع مجاور به زاویه قائمه محاسبه کرد.

قاعده «هواوهو»، این طور بیان می شود: «هر کدام از ضلع های مجاور به زاویه قائمه را در خودش ضرب کن، جمع کن، از این مجموع جذر بگیر. حاصل برابر وتر می شود. به همین ترتیب، ضلع افقی مجاور به زاویه قائمه را در خودش ضرب کن، آن را از ضرب وتر در خودش کم کن، از باقی مانده

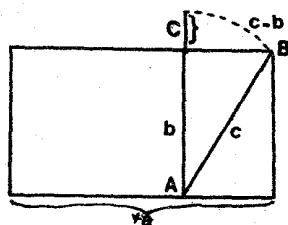
جذر بگیر. ضلع قائم مجاور به زاویه قائمه به دست می آید».

اصطلاح های «هواو» و «هو» به معنای ضلع های مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه هستند. ضمناً «هواو» به ضلع قائم و معمولاً کوچکتر، و «هو» به ضلع افقی و معمولاً بزرگتر، اطلاق می شده است. معنای تحت اللفظی «هواو» - قلاب و «هو» - دنده یا رابط است.

از قاعده «هواو هو»، در تمام ۲۴ مسأله کتاب نهم رساله «ریاضیات در نه کتاب» استفاده شده است و، به همین مناسبت، کتاب نهم را «هواو هو» می نامند.

*

در رساله، برای حل مسأله، این طور گفته شده است: «نصف ضلع برکه را در خودش ضرب کن، قسمت بالای آب، یعنی ۱ «چی» را در خودش ضرب کن؛ از اولی کم کن، باقی مانده را بر ۲ برابر قسمت روی آب نی تقسیم کن، عمق آب را به دست آور. قسمت بالای آب را به آن اضافه کن، طول نی پیدا می شود».



شکل ۲۷

رساله، جواب را نداده است،

ولی با این راهنمایی، می توان جواب را به سادگی به دست آورد.

طول برکه را $2a$ ، ارتفاع نی

را c و عمق برکه را b می گیریم

(شکل ۲۷). باید b و c را پیدا

کنیم. با استفاده از قاعده چینی،

می توان رابطه های زیر را، برای این دو مجهول، نوشت:

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$$

$$c = b + (c - b) = \frac{a^2 + (c - b)^2}{2(c - b)}$$

در رساله، نتیجه این قاعده داده نشده است، بنابراین به سختی می توان فهمید که، ریاضی دانان چین باستان، از چه راهی، این رابطه ها را به دست می آوردند.

با وجود این، با استدلال‌های عادی می‌توان، به راحتی، به این رابطه‌ها رسید. با شروع از شرط‌های مسئله و به کار بردن قاعده «هوا و هو»، یعنی قضیه فیثاغورث، به این دستگاه می‌رسیم:

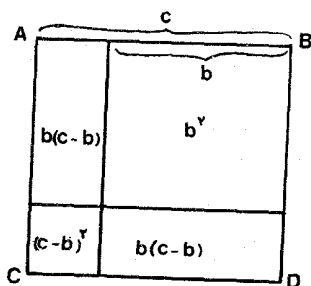
$$\begin{cases} b = c - k \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases}$$

که در آن، برای سادگی کار، قسمت بالای آب‌را، که برای ما معلوم است، یعنی $c - b$ را، به k نشان داده‌ایم. با حل این دستگاه، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} b = \frac{a^2 - k^2}{2k} \\ c = \frac{a^2 + k^2}{2k} \end{cases} \quad (k = c - b)$$

«لیو هوای» ضمن بحث درباره «ریاضیات در نه کتاب»، به طور قانع کننده‌ای روشن می‌کند که چینی‌ها قاعده‌ای به دست آورده بودند که می‌شد، از آن، دو رابطه اخیر را نتیجه گرفت.

او معتقد است، این رابطه‌ها را، که به طور شفاهی داده شده است، براساس تصورات هندسی به دست آورده‌اند. ظاهراً، دانشمندان چین باستان، در این مورد، از شکلی شبیه شکل ۲۸ استفاده می‌کرده‌اند. قبل از همه، بنا بر قاعده «هوا و



شکل ۲۸

هو» داریم:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

سپس، از روی شکل معلوم است:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)^2 + 2b(c - b)$$

و از آنجا

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$$

۷۴. ریاضی دان چین باستان، برای حل این مسأله، قاعده زیر را، در رساله خود، ذکر می کند: «۷ را در خودش ضرب کن، ۳ را هم در خودش ضرب کن، با هم جمع و بعد نصف کن. این را به عنوان معیار A در جهت کج بگیر. از ۷ که در خودش ضرب کرده ای، معیار حرکت در جهت کج را کم کن، باقی مانده، معیار همان حرکت به طرف جنوب می شود. ۳ را در ۷ ضرب کن، این معیار حرکت B به طرف شرق است، ۱۰ «بو» حرکت به طرف جنوب را در معیار حرکت A در جهت کج ضرب کن؛ ۱۰ «بو» را در معیار حرکت B به طرف شرق ضرب کن. هر کدام از این ها مقسوم است. مقسوم ها را با معیار حرکت به طرف جنوب در نظر بگیر و مقادارها را پیدا کن».

با استفاده از این قاعده، مسأله به این ترتیب حل می شود:

(۱) ابتدا، معیار حرکت A را «در جهت کج» به دست می آوریم:

$$\frac{7^2 + 3^2}{2} = 29$$

(۲) معیار حرکت A به طرف جنوب را به دست می آوریم:

$$7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2} = 20$$

(۳) مقدار حرکت به طرف شرق، چنین می شود:

$$7 \times 3 = 21$$

(۴) «مقسوم» ها را پیدا می کنیم:

$$10 \times 29; 10 \times 21$$

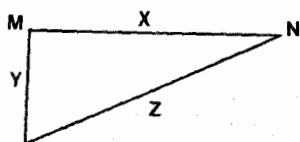
(۵) A «در جهت کج»، این مقدار راه رفته است:

$$\frac{10 \times 29}{20} = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2} \quad \text{«بو»}$$

(۶) B به طرف شرق، این مقدار راه رفته است:

$$\frac{10 \times 21}{20} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} \quad \text{«بو»}$$

راه حل عادی این مسأله، چنین است: x را راهی می گیریم که B به طرف شرق رفته است؛ y مسافتی که A به طرف جنوب طی کرده است (ضمناً،



شکل ۲۹

بنابر شرط مسأله می‌دانیم: $y = 10$
و بالاخره، z را مقدار «راه کج»
به طرف شمال شرقی می‌گیریم، که
همان وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌شود
(شکل ۲۹). در این صورت، داریم:

$$x^2 + 10^2 = z^2,$$

$$\frac{x}{z + 10} = \frac{3}{7}$$

از آن جا

$$z = \frac{7}{3}x - 10$$

سپس

$$x^2 + 10^2 = \left(\frac{7}{3}x - 10\right)^2$$

یا

$$x^2 + 100 = \frac{49}{9}x^2 - \frac{2 \times 7 \times 10}{3}x + 100,$$

$$40x^2 - 3 \times 2 \times 7 \times 10x = 0,$$

$$2x^2 - 21x = 0,$$

$$x(2x - 21) = 0 \Rightarrow x = 10\frac{1}{2} \quad \text{«بو»}$$

حالا، z را پیدا می‌کنیم:

$$z = \frac{7}{3} \times \frac{21}{2} - 10 = \frac{49}{2} - 10 = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2} \quad \text{«بو»}$$

۷۵. برای این مسأله هم، مثل همه مورد های دیگر، تنها قاعده عمل

داده شده است: «۱ چژان را در خودش ضرب کن، می‌شود «شی»، نصف اضافی را در خودش ضرب کن، دو برابر کن و از «شی» کم کن. نصف باقی مانده را بردار، از آن جذر بگیر، از آن چه به دست آمد، نصف اضافی را کم کن، این عرض در می‌شود. و اگر نصف اضافی را با آن جمع کنی، ارتفاع در پیدا می‌شود».

اگر عرض در را x و طول آن را y بگیریم و فرض کنیم $y - x = m$ (اضافی). بعدقطر را به d نشان دهیم، مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 \\ m = x - y \end{cases}$$

برای پیدا کردن x ، به این معادله درجه دوم می رسیم:

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0$$

که با حل آن به دست می آید:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}} = \\ &= -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{2d^2 - m^2}{4}} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} \end{aligned}$$

از آن جا که دانشمندان چینی، به جواب های منفی توجهی نداشتند، برای عرض در، باید نتیجه گرفت

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}$$

و این، همان چیزی است که در قاعده رساله، برای تعیین مقدار x آمده است. روشن است که، با در دست داشتن x ، می توان y را از رابطه زیر پیدا کرد:

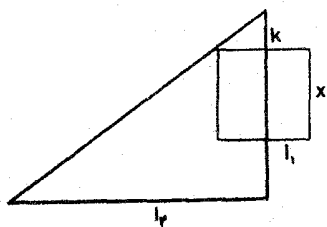
$$y = x + m$$

ولی در رساله، برای پیدا کردن مقدار y ، این رابطه داده شده است.

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2}$$

که ریشه مثبت این معادله است:

$$2y^2 - 2my + m^2 - d^2 = 0$$



شکل ۳۰

۷۶. قاعده چینی، برای حل

این مسأله می‌گوید: «مقدار «بو» ، فاصله تا دروازه شمالی را در دو برابر مقدار «بو» که به‌غرب می‌رویم ضرب کن، این می‌شود مقسوم. با مقدار «بو» که از دروازه جنوبی

رفته‌ایم، جمع کن، این هم می‌شود مقسوم علیه. جذر بگیر، ضلع مربع را خواهی داشت».

این مسأله را می‌توان به کمک شکل روشن کرد (شکل ۳۰). با استفاده از علامت گذاری‌های شکل، می‌توان مسأله را، به حل معادله درجه دوم زیر منجر کرد:

$$x^2 + (k + l_1)x - 2kl_2 = 0$$

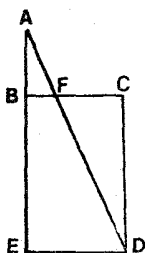
۷۷. باید توجه داشت که

$$100 \text{ «تسون»} = 10 \text{ «چی»} = 1 \text{ «چژان»}$$

ریاضی دانان چینی، به احتمال زیاد، ضمن تنظیم قاعده لازم برای حل مسأله، از مثلث‌های متشابه ABF و FCD استفاده کرده‌اند (شکل ۳۱). با توجه به این دو مثلث، خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{x}{FC};$$

$$x = FC \cdot \frac{AB}{BF} = \frac{AB(BC - BF)}{BF}$$



شکل ۳۱

قاعده‌ای که در رساله داده شده است، بر مبنای همین رابطه اخیر است: «از ۵

«چی» قطر چاه، ۴ «تسون» را که از قطر جدا شده است، کم کن. باقی مانده را در ۵ «چی» ارتفاع دیرك ضرب کن. این مقسوم است. ۴ «تسون»، بخش

جداشده قطر، مقسوم علیه است. مقسوم و مقسوم علیه را با هم در نظر بگیر، مقدار مجهول، بر حسب «تسون» به دست می آید».

۷۸. در رساله، برای حل این مسأله، قاعده زیر داده شده است: «محیط قاعده را در خودش ضرب کن، بعد در ارتفاع ضرب کن. بر ۳۶ تقسیم کن».

به این ترتیب، چینی ها، حجم مخروط را، از این رابطه به دست می آورده اند:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{c}{4\pi}$$

که در آن، c عبارت است از محیط قاعده مخروط. ضمناً چینی ها، عدد π را برابر ۳ می گرفته اند.

۷۹. چینی ها، این مسأله را با این قاعده حل می کردند: «محیط قاعده های بالا و پایین را درهم ضرب کن، هر کدام را در خودش ضرب کن، همه این ها را جمع کن و ضرب کن در ارتفاع. بر ۳۶ تقسیم کن».

بنابراین، حجم مخروط ناقص، در چین باستان، از روی این رابطه پیدا می شد:

$$V = \frac{(Cc + C^2 + c^2)h}{36}$$

که اگر π را برابر ۳ بگیریم، می توان آن را به این صورت نوشت:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{Cc + C^2 + c^2}{4\pi}$$

که در آن، C و c ، به ترتیب، محیط قاعده های پایین و بالای مخروط ناقص و h ارتفاع آن است.

۸۰. قاعده چینی، در مورد این مسأله، چنین است: «ضلع های افقی و قائم مجاور به زاویه قائمه را جمع کن، این می شود مقسوم علیه. همین ضلع ها را درهم ضرب کن، می شود مقسوم. با عمل روی مقسوم و مقسوم علیه، ضلع مربع، بر حسب «یو»، به دست می آید».

۸۱. مسأله را می توان به کمک شکل روشن کرد (شکل ۳۲).

دانشمندان چینی، ظاهراً برای حل این مسأله، از تشابه دو مثلث SAD و ECD استفاده کرده‌اند. از این دو مثلث، می‌توان نتیجه گرفت:

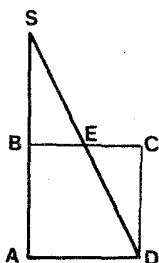
$$\frac{AS}{CD} = \frac{AD}{EC}$$

یا

$$x = AS = \frac{AD \cdot DC}{EC}$$

که با قراردادن مقادیرهای مفروض، به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{۱ \times \text{«چژان»}}{۳ \text{ «تسون»}}$$



شکل ۳۲

در رساله باستانی چین، این قاعده برای حل مسأله داده شده است: «۱ «چژان» را در خودش ضرب کن، این مقسوم است. ۳ «تسون» مقسوم علیه است. مقسوم و مقسوم علیه را با هم در نظر بگیر.»

۸۲. ظاهراً چینی‌ها، برای حل این مسأله، از تشابه دو مثلث قائم الزاویه AKN و NLF استفاده کرده‌اند (شکل ۳۳). از این دو مثلث، به‌دست می‌آید:

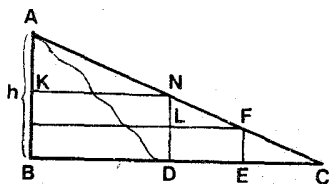
$$\frac{AK}{KN} = \frac{NL}{LF}$$

و یا

$$\frac{x - ND}{BD} = \frac{ND - FE}{DE}$$

و بنابراین

$$x = ND + \frac{(ND - FE)BD}{DE}$$



شکل ۳۳

همین رابطه است که در رساله چینی «ریاضیات در نه کتاب»، به‌عنوان حل مسأله، داده شده است: «از ارتفاع ستون، ارتفاع سطح دید (۷ «چی») را کم کن، تفاضل را در ۵۳ «لی» ضرب کن، این می‌شود مقسوم. فاصله شخص تا ستون، یعنی ۳ «لی»، مقسوم علیه است. مقسوم و مقسوم علیه

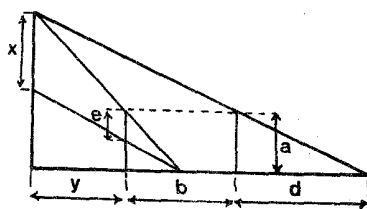
را با هم در نظر بگیر. آن‌چه را به دست آوردی، با ارتفاع ستون جمع کن، این می‌شود ارتفاع کوه».

۸۳. لیوهوئه، ریاضی‌دان سده سوم، چینی و مؤلف آثار زیادی در ریاضیات، کارهای بسیاری در زمینه پیشبرد هندسه کاربردی دارد. تمامی رساله او، به نام «ریاضیات جزیره دریایی»، به کاربرد عملی هندسه اختصاص دارد. او این رساله را، ابتدا به عنوان فصل دهم تفسیر خود بر کتاب قدیمی «ریاضیات در نه کتاب» نوشت، ولی بعدها به صورت کتاب مستقلی عرضه شد. خود نام رساله نشان می‌دهد که، در آن، مسأله‌های گوناگونی درباره تعیین فاصله تا اشیاء غیر قابل دسترس، که در جزیره قرار دارند و ناظر هم در خارج آن جزیره واقع است، حل شده است. علاوه بر آن، در این رساله، مسأله‌هایی هم درباره محاسبه ارتفاع‌های غیر قابل دسترس داده شده است، که ناظر در همان جزیره وجود دارد.

*

لیوهوئه، مسأله را با قاعده‌ای حل می‌کند که می‌توان آن را با دورابطه زیر بیان کرد:

$$x = \frac{be}{d+c} + e; \quad y = \frac{bc}{d-c}$$



شکل ۳۴

که در آن‌ها، x ارتفاع درخت کاج؛
 y فاصله دیرک اول از تپه،
 a ارتفاع هر دیرک؛
 b فاصله بین دیرک‌ها؛
 c فاصله نقطه‌ای که عقب دیرک قرار دارد و با انتهای دیرک اول و رأس درخت روی یک خط راست است،

تا پای دیرک؛
 d فاصله‌ای از عقب دیرک دوم که با انتهای دیرک دوم و رأس درخت روی یک خط راست قرار دارد، تا پای دیرک؛
 e عددی است که «قاعده درخت» را از رأس دیرک دوم «اندازه می‌گیرد» (شکل ۳۴).

باید توجه داشت که اغلب مسأله‌های «لیو هوئه» دشوار است .
خود او ، راه حل مسأله‌ها را ، طبق معمول ، به صورت قاعده و براساس
مثلت‌های متشابه می‌دهد . این مسأله‌ها ، به علت اهمیتی که از نظر عملی
دارند، بعدها، چه در چین و چه در بیرون از مرزهای چین به طور گسترده‌ای
شهرت پیدا کردند.

۵. مسأله‌های هندی

یادداشت تاریخی

هند فرهنگی بزرگ، غنی و بکر دارد، که سرچشمه آن را باید در ژرفای تاریخ جست و جو کرد. هزاران سال پیش از این، وحتى پیش از میلاد، در هند، کانال‌های آبیاری و دستگاه آب‌رسانی شهری به وجود آمده بود و ساختمان‌های چند طبقه با آجر پخته وجود داشت. هندی‌ها، از زمان‌های بسیار دور، با هنر سرامیک سازی آشنا بودند و چیزهای زیادی را از گل پخته به دست می‌آوردند، از چرخ کوزه‌گری استفاده می‌کردند و هنر جواهرسازی را (با استفاده از فلزها و سنگ‌های قیمتی)، به حد کمال خود رسانده بودند. حتی در دورترین دوران‌های تاریخی، آگاهی‌های بسیاری در زمینه دستور زبان، اخترشناسی و بعضی از دانش‌های دیگر، در سرزمین هند وجود داشت.

بیشترین موفقیت دانشمندان هندی، در زمینه ریاضیات بود. آن‌ها پایه‌های اصلی حساب و جبر را بنا نهادند و یونانی‌ها، در واقع، کارهای آن‌ها را دنبال کردند.

بزرگ‌ترین موفقیت ریاضی دانان هندوستان را باید، قبل از همه، کشف دستگاه موضعی عددنویسی دانست که از ده رقم هندی تشکیل می‌شد و شامل صفر هم بود. هندی‌ها، صفر را «سونیا» می‌نامیدند که به معنای «هیچ» بود. یادآوری این مطلب جالب است که، در ابتدا، صفر را با یک نقطه نشان

می دادند و، تنها بعد از گذشت چند سده، دایرهٔ توخالی کوچک را به جای آن انتخاب کردند. از این که، کدام دانشمند هندی، دستگاه دهدهی را برای نخستین بار به کار برده است، اطلاعی نداریم. با وجود این، دلیل‌هایی وجود دارد که می‌توان حکم کرده، این دستگاه در ابتدای سدهٔ اول میلادی کشف شده است. ولی، به کار بردن علامت صفر را، باید به سدهٔ دوم میلادی مربوط دانست.

به عنوان مشهورترین ریاضی‌دانان هندی، می‌توان از آریابهاتا (اواخر سدهٔ اول)، برهماگوپتا (سدهٔ هفتم) و بهاسکارا (سدهٔ دوازدهم) نام برد.

ریاضی‌دانان هندی دوران کهن، دوست داشتند، در اجتماع‌های عمومی مردم، باهم مسابقه دهند. یکی از نویسندگان هندی سدهٔ هفتم، در پایان کتاب خود می‌نویسد: «همان طور که خورشید، با پرتوهای درخشان خود، ستارگان را محو می‌کند، یک حکیم هم، وقتی که در اجتماع‌های مردم، مسأله‌های ریاضی را طرح و حل می‌کند، برافتخارهای دیگران، خط بطلان می‌کشد».

یادآوری می‌کنیم که، تمام راهنمایی‌ها و حل‌هایی که در این جا از معأله‌های هندی داده شده است، با علامت‌گذاری‌های امروزی است.

حل مسأله‌ها

۸۴. این مسأله، از رسالهٔ باهشالی برداشته شده است، که در سال ۱۸۸۱ میلادی در حفاری‌های شهر باهشالی، در شمال غربی هند، پیدا شده است. رساله، بر پوست درخت نوشته شده و متعلق به سدهٔ سوم یا چهارم میلادی است. دانشمندان اعتقاد دارند که، این رساله، دست‌نویس ناقصی از یک رسالهٔ کهن‌تر است.



مؤلف رساله پیشنهاد می‌کند که مسأله را با «قاعدهٔ فرضی» و در حالت خاص خودش، یعنی وقتی که عدد مجهول را واحد بگیریم (روش تبدیل به واحد)، حل کنیم. استدلال به این ترتیب، انجام می‌گیرد: عدد مجهول را

واحد می گیریم، در این صورت سهم نیاز اولی ۱، دومی ۲، سومی ۶ و چهارمی ۲۴ می شود. به این ترتیب، مجموع نیازها برابر می شود با ۳۳. حالا ۱۳۲ را بر ۳۳ تقسیم می کنیم. حاصل، پاسخ مورد نظر ما، یعنی مقدار نیاز اولی را می دهد.

۸۵. طبق شرطهای مساله، باید داشته باشیم:

$$n + 5 = x^2$$

$$n - 11 = y^2$$

معادله دوم را از معادله اول کم می کنیم، به دست می آید:

$$16 = x^2 - y^2,$$

و یا

$$16 = (x+y)(x-y)$$

از آن جا، به یکی از دو حالت زیر می رسم:

$$\left| \begin{array}{l} x+y=8 \\ x-y=2 \end{array} \right| \quad \text{یا} \quad \left| \begin{array}{l} x+y=16 \\ x-y=1 \end{array} \right|$$

با حل دستگاه اول به دست می آید:

$$x=5, \quad y=3$$

بنابراین، عدد مجهول برابر است با ۲۵.

با حل دستگاه دوم به دست می آید:

$$x = \frac{17}{2}, \quad y = \frac{15}{2}$$

و بنابراین: $n = 67\frac{1}{4}$.

۱. البته خواننده توجه دارد که، اگر قرار باشد جوابهای کسری را قبول کنیم،

ضرورتی ندارد $x+y$ و $x-y$ را، عددهایی درست در نظر بگیریم. مثلاً، با

فرض $x+y=6$ و $x-y=\frac{1}{3}$ ، به دست می آید، $x=\frac{13}{3}$ و $y=\frac{5}{3}$ ، از

آن جا، به یکی از جوابهای دیگر برای عدد n می رسم: $n = \frac{124}{9}$ یا

$$n = 13\frac{7}{9}$$

۸۶. مسأله، منجر به حل این معادله می شود:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) + 1 = x$$

که با حل آن $x = 15$ به دست می آید. یعنی، تعداد زنبورهای عسل، ۱۵ عدد بوده است.

*

این مسأله از رساله «ماهیت محاسبه» (هائی تاسارا) سریدهای، ریاضی دان هندی، برداشته شده است که در فاصله سده های ششم تا دهم میلادی می زیسته است (زمان دقیق زندگی او معلوم نشده است). سریدهای مسأله های زیادی دارد که بیشتر آنها، بارها مورد استفاده ریاضی دانان هندی در زمان های بعد قرار گرفته است.

۸۷. فرض می کنیم، ستاره اول، بعد از آن که راهی به اندازه x طی کند، به ستاره دوم برسد. در این صورت، زمانی که برای طی این راه لازم دارد، برابر است با $\frac{x}{v_1}$.

در همین مدت، ستاره دوم، راهی به اندازه $d - x$ رفته است و به اندازه

$$\frac{d - x}{v_2} \text{ وقت صرف کرده است. به این معادله می رسیم:}$$

$$\frac{x}{v_1} = \frac{d - x}{v_2}$$

و از آن جا، به دست می آید:

$$x = \frac{dv_1}{v_1 + v_2}$$

این مسأله، از رساله «آریابها تانامه»، متعلق به ریاضی دان مشهور هند آریابها تا برداشته شده است، که در اواخر سده پنجم و اوایل سده ششم می زیسته است. این رساله، شامل مسأله هایی از اخترشناسی و ریاضیات است. آریابها تا، در بخش ریاضی این رساله، قانون هایی از حساب، جبر، هندسه و مثلثات را که در اخترشناسی - و به خصوص، در تنظیم جدول های

نجومی - لازم دارد، می آورد. آریابهاتا مسأله های زیادی در زمینه ریاضیات مقدماتی دارد، که بعضی از آن ها را در این جا آورده ایم.

۸۸. این مسأله، عبارت است از محاسبه مجموع عددهای به اصطلاح

مثلثی که به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ هستند. اگر در این عبارت، مقدار n را

به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ... بگیریم، عددهای مثلثی به دست می آید:

... ۵۵، ۴۵، ۳۶، ۲۸، ۲۱، ۱۵، ۱۰، ۶، ۳، ۱

توجه کنیم که، مجموع هر دو عدد مجاور مثلثی، یک مجذور کامل است. اکنون، اگر عدد مثلثی را به T نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$T_n + T_{n-1} = n^2$$

$$T_{n-1} + T_{n-2} = (n-1)^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T_3 + T_2 = 3^2$$

$$T_2 + T_1 = 2^2$$

اگر این برابری ها را با هم جمع کنیم، به دست می آید:

$$T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \dots + T_2) + T_1 =$$

$$= n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1;$$

$$2(T_n + T_{n-1} + \dots + T_2 + T_1) =$$

$$= T_1 + T_n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

اکنون، اگر توجه کنیم که $T_1 = 1$ و $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، به دست می آید:

$$T_n + T_{n-1} + \dots + T_2 + T_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

که بعد از ساده تر کردن، خواهیم داشت:

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۸۹. فرض می‌کنیم، اولی a کالا و m سکه و دومی b کالا و n سکه

داشته باشند، اگر قیمت هر کالا را x بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$ax + m = bx + n$$

که با حل آن، مقدار x به دست می‌آید:

$$x = \frac{n - m}{a - b}$$

۹۰. قطر دایره را d می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{13}{15}d\right)^2$$

و از آنجا

$$\pi = \frac{676}{225}$$

و یا $\pi = 3/00(4)$. اشتباه در حدود $4/3\%$ است.

*

این مساله، از يك مجموعه قدیمی هندی به نام «سولوا - سوترا» (قانون طناب) برداشته شده است، و یکی از قدیمی‌ترین یادبودهای هندسه هندی است که به ما رسیده است. در «سولوا - سوترا» دستورهای خاصی برای ساختن قربان‌گاه‌ها داده شده است؛ و ضمن آن، مطلب‌های پرارزشی از هندسه و کاربرد آن آمده است. این موضوع‌ها مربوط می‌شود به شکل قربان‌گاه‌ها، اندازه‌های مختلف آن‌ها و جهت‌گیری نسبت به نور.

تاکنون، سه تا از این مجموعه‌ها شناخته شده است. مؤلفان این مجموعه‌ها عبارتند از «بله‌ایانا» (سده ششم یا هفتم پیش از میلاد)، «کاتیایانا» و «آناستامبا» (سده چهارم یا پنجم پیش از میلاد).

بر اساس این مجموعه‌ها می‌توان به این نتیجه رسید که، دست کم در سده هشتم پیش از میلاد، دانشمندان هندی از قضیه مربوط به وتر (قضیه فیثاغورث) اطلاع داشتند و این مدت‌ها پیش از فیثاغورث است. در «سولوا - سوترا»، این قضیه، این‌طور تنظیم شده است: «اگر طنابی را به‌طور اریب، در امتداد مربع (مستطیل) قرار دهیم، همان می‌شود که طناب را به‌طور جداگانه روی

هر بعد آن بگذاریم و باهم به حساب آوریم».

اگر دانشمندان قدیم یونانی می‌کوشیدند تا مسئله تبدیل يك دایره مفروض را به مربع حل کنند (مسئله تربیع دایره)، ریاضی دانان هندی می‌کوشیدند تا مسئله عکس را حل کنند (البته به تقریب)، یعنی مربع را به دایره هم‌ارز آن تبدیل کنند.

در «سولوا - سوترا»، قاعده «کاتیایانا» داده شده است: «باید قطر را به ۱۵ بخش مساوی تقسیم کرد و ۱۳ بخش از آن را، برای ساختن مربعی که بادایره (تقریباً) برابر است، برداشت». و همین قاعده «کاتیایانا» مضمون مسئله فوق را تشکیل می‌دهد.

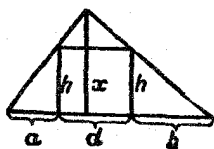
۹۱. h را ارتفاع تکه چوب،

a و b را طول سایه آن در دو حالت

مختلف و d را فاصله بین پای تکه

چوب در حالت اول و پای آن در حالت

دوم می‌گیریم (شکل ۳۵).



شکل ۳۵

اگر ارتفاع شمع را x بگیریم. با

توجه به مثلث‌های متشابهی که روی شکل دیده می‌شود، داریم:

$$\frac{x}{x-h} = \frac{a+b+d}{d}$$

و از آن جا

$$x = \frac{h(a+b+d)}{a+b} = h \left(1 + \frac{d}{a+b} \right)$$

مؤلف این مسئله، براهماگوپتا (متولد ۵۹۸ میلادی)، بزرگترین

ریاضی دان و اخترشناس هندی است. تنها یکی از رساله‌های نجومی او به ما

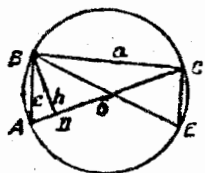
رسیده است که در سال ۶۲۸ میلادی نوشته شده و شامل ۲۰ کتاب است و،

از آن‌ها، کتاب دوازدهم (حساب) و کتاب هیجدهم (جبر) به ریاضیات مربوط

می‌شود. در کتاب حساب او، فصل‌هایی هم به موضوع‌های هندسی اختصاص

دارد و مسئله‌ای را هم، که در بالا حل کردیم، از آن جا برداشته‌ایم.

۹۲. باید ثابت کنیم: $\frac{a.c}{h} = BE$ ، که در آن، BE عبارت است



شکل ۳۶

از قطر دایره محیطی مثلث (شکل ۳۶).
 مثلث‌های ADB و BCE را
 در نظر می‌گیریم؛ این مثلث‌ها متشابه‌اند
 و داریم:

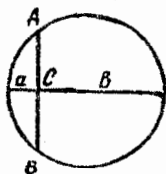
$$c : h = BE : a$$

و از آن‌جا

$$BE = \frac{a \cdot c}{h}$$

۹۳. باید ثابت کنیم: $\frac{AB^2}{4a} + a = D$ ، که در آن، D عبارت است

از قطر دایره (شکل ۳۷). در واقع،
 داریم:



شکل ۳۷

$$AC^2 = a \cdot b \quad (۱)$$

$$Ac = \frac{AB}{2} \quad (۲)$$

$$b = D - a \quad (۳)$$

برابری (۱)، با توجه به برابری‌های (۲) و (۳) به این شکل درمی‌آید:

$$\frac{AB^2}{4} = a(D - a)$$

و یا

$$\frac{AB^2}{4} + a^2 = Da \quad (۴)$$

اگر دو طرف برابری (۴) را بر a تقسیم کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{AB^2}{4a} + a = D$$

۹۴. باید ثابت کنیم (شکل ۳۷):

$$a = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - AB^2})$$

با توجه به مسأله قبل داریم:

$$AB^2 = 2aD - 2a^2$$

اکنون به سادگی دیده می شود:

$$D^2 - AB^2 = D^2 - 2aD + 2a^2 = (D - 2a)^2;$$

$$\frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - AB^2}) = \frac{1}{2}[D - (D - 2a)] = a$$

۹۵. این مسأله، از رساله «آموزش اخترشناسی» بهاسکارا - آکاریا، ریاضی دان مشهور هندی سده دوازدهم (تولد او در سال ۱۱۱۴ میلادی است، ولی تاریخ مرگ او معلوم نیست)، برداشته شده است. صفت «آکاریا» به معنای حکیم و دانشمند است. قسمت مقدمه ای رساله، شامل حساب («لیلاواتی»، که ترجمه تحت اللفظی آن «زیبا» است) و جبر («ویجاها نیتا»، به معنی «محاسبه ریشه») می شد. به اعتقاد بسیاری از مورخان ریاضی، لیلاواتی، دختر بهاسکارا بوده است که بخش مربوط به حساب از اثر خود را به نام او کرده است.

*

بهاسکارا، این مسأله را با روش فرضی حل کرده است.

فرض می کنیم، عدد مفروض برابر ۳ باشد. در این صورت، بنا بر فرض مسأله، $3 \times 5 = 15$ ، یک سوم ۱۵ می شود ۵، چون $10 = 5 - 15$ ، با تقسیم ۱۰ بر ۱۵ به عدد ۱ می رسیم. حالا اگر $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ عدد ۳ را به واحد اضافه کنیم، به دست می آید:

$$1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}$$

که ۱۶ بار از ۶۸ کوچکتر است.

بنابراین، عدد مجهول برابر است با: $3 \times 16 = 48$.

۹۶. داریم:

$$\begin{aligned} & \sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \\ & = \sqrt{2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

این مسأله را، از رساله دیگر بهاسکارا به نام «سید هانتا - سیرومانی» برداشته ایم.
۹۷. اتحاد زیر را در نظر می گیریم:

$$[(m^2 + n^2)x]^2 = [(m^2 - n^2)x]^2 + (2mnx)^2$$

$(m^2 + n^2)x$ را وتر مثلث و $(m^2 - n^2)x$ و $2mnx$ را ضلع های پهلوی زاویه قائمه می گیریم

با توجه به شرط مسأله، داریم:

$$(m^2 + n^2)x = mnx^2(m^2 - n^2)$$

و یا

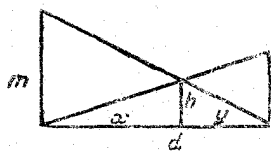
$$m^2 + n^2 = mn(m^2 - n^2)x$$

و از آن جا

$$x = \frac{m^2 + n^2}{mn(m^2 - n^2)}$$

اکنون بدون هیچ زحمتی، می توان ضلع های مثلث و؛ بنابراین، خود مثلث را به دست آورد.

این مسأله را از رساله «آموزش اخترشناسی» بهاسکارا برداشته ایم.



شکل ۳۸

۹۸. طول عمود را h ، فاصله

بین پای دو چوب خیزران را d و پاره خط های روی d را x و y می نامیم (شکل ۳۸). قاعده بهاسکارا را می توان

این طور نوشت:

$$h = \frac{m \cdot n}{m + n}; x = \frac{dm}{m + n}; y = \frac{dn}{m + n}$$

در واقع داریم:

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{y}; \frac{n}{h} = \frac{d}{x}; x + y = d$$

که باحل این دستگاه، نسبت به مجهول های h ، x و y ، مقدارهای مورد نظر به دست می آید.

۹۹. فرض می کنیم، اولی $100 - 2x$ روپیه و دومی $x + 100$ روپیه داشته باشند. روشن است که، در این صورت، شرط اول مسأله، برقرار است. با توجه به شرط دوم باید داشته باشیم:

$$6(2x - 110) = x + 110$$

و با حل این معادله، به دست می آید: $x = 70$.

در نتیجه، اولی $100 - 140$ ، یعنی ۴۰ روپیه و دومی $70 + 100$ یعنی ۱۷۰ روپیه داشته است.

۱۰۰. دو طرف معادله $ax^2 + bx = c$ را در $4a$ ضرب می کنیم، به دست می آید:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

بعد، به دو طرف برابری اخیر، b^2 را اضافه می کنیم:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$

چون سمت چپ برابری، قابل تبدیل به مجذور کامل است، بنابراین:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

و از آن جا

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

و اما، درباره جواب دوم، که به علامت منفی در جلو رادیکال مربوط است، بهاسکار امتذکرمی شود که «مردم، عددهای منفی انتزاعی را نمی پسندند». ۱۰۱. ریاضی دانان هندی، برای حل مسأله های حساب، به طور وسیع، از روشی به نام «قاعدۀ برگشت» یا «قاعدۀ معکوس» استفاده می کردند. ماهیت این روش چنین بود: وقتی که می خواهیم عددی را پیدا کنیم که یک ردیف عمل روی آن انجام شده است تا به عدد مفروضی رسیده ایم، باید روی این عدد آخر، عکس همان عمل ها را و در ردیف عکس، انجام داد. در مورد این مسأله هم، باید با آغاز از عدد ۲، عکس عمل ها را، به ردیف عکس، انجام داد.

$$(2 \times 10 - 8)^2 + 52 = 196; \sqrt{196} = 14;$$

$$14 \times \frac{10}{7} \times 7 \times \frac{3}{5} = 84; \quad 84:3 = 28$$

عدد مجهول، برابر است با ۲۸.

۱۰۴. اگر تعداد زنبورها را $2x^2$ بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$2x^2 = x + \frac{16}{9}x^2 + 2$$

یا

$$2x^2 - 9x = 18$$

که از آن $x = 6$ و $2x^2 = 72$ به دست می‌آید.

۱۰۳. مسأله، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35$$

یا

$$x^3 + 12x - 6x^2 = 35$$

که اگر از دو طرف برابری، ۸ واحد کم کنیم، به ترتیب، خواهیم داشت:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27,$$

$$(x-2)^3 = 27,$$

$$x-2=3, \quad x=5$$

بهاسکارا جواب‌های دیگر را نمی‌دهد (به جواب‌های موهومی توجهی

ندارد).

این معادله درجه سوم را، با روش مقدماتی دیگری هم می‌توان حل

کرد. این روش حل، در زیر داده شده است:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0,$$

$$x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + 7x - 35 = 0,$$

$$x^2(x-5) - x(x-5) + 7(x-5) = 0,$$

$$(x-5)(x^2 - x + 7) = 0$$

و در نتیجه، معادله درجه دوم مفروض، به مجموعه دو معادله زیر تبدیل

می‌شود:

$$x-5=0, \quad x^2-x+7=0$$

ریشه معادله اول عبارت است از $x_1 = 5$ و x_2 و x_3 ، ریشه‌های معادله دوم، موهومی هستند.

۰۱۰۴ به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2 - 400x &= 9999, \\x^4 - 11x^3 + 11x^2 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x + \\+ 909x - 9999 &= 0, \\x^3(x-11) + 11x^2(x-11) + 119x(x-11) + \\+ 909x(x-11) &= 0, \\(x-11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) &= 0\end{aligned}$$

به مجموعه دو معادله زیر می‌رسیم:

$$x - 11 = 0, \quad x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$$

با حل معادله اول به دست می‌آید: $x_1 = 11$ (و این همان جوابی است که بهاسکارا می‌دهد). با حل معادله دوم هم، سه جواب دیگر به دست می‌آید که بهاسکارا به آن‌ها توجه نکرده است. این جواب‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x^3 + 11x^2 + 119x + 909 &= 0, \\x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x + 101x + 909 &= 0, \\x^2(x+9) + 2x(x+9) + 101(x+9) &= 0, \\(x+9)(x^2 + 2x + 101) &= 0\end{aligned}$$

باز هم به مجموعه دو معادله می‌رسیم:

$$x + 9 = 0, \quad x^2 + 2x + 101 = 0$$

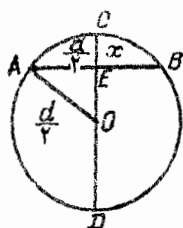
که با حل معادله اول به دست می‌آید: $x_2 = -9$. ریشه‌های x_3 و x_4 معادله دوم موهومی هستند.

۰۱۰۵ به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}ax + by + c &= xy, \\c &= xy - ax - by, \\ab + c &= xy - ax - by + ab, \\ab + c &= y(x-b) - a(x-b) = (x-b)(y-a)\end{aligned}$$

برای این که جوابهای گویا را برای x و y به دست آوریم، باید فرض کنیم:
 $x = b + n$ در این صورت خواهیم داشت:

$$y = a + \frac{ab + c}{n}$$



شکل ۳۹

۱۰۶. اگر طول قطر CD را

به d و قاعده AB از قطعه دایره را

به a و طول مجهول CE را به x

نشان دهیم (شکل ۳۹). داریم:

$$\frac{a^2}{4} = x(d - x) = dx - x^2$$

یا

$$x^2 - dx + \frac{a^2}{4} = 0$$

که از آن جا به دست می آید:

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{2}, \quad x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{2}$$

۱۰۷. اگر تعداد همه میمون ها را x بگیریم، مسأله منجر به حل این

معادله می شود:

$$\frac{x^2}{64} + 12 = x \Rightarrow x^2 - 64x = -768$$

به دو طرف برابری، مجذور ۳۲ را اضافه می کنیم، به دست می آید:

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024$$

که اگر از دو طرف برابری، جذر بگیریم، می شود:

$$x - 32 = \pm 16$$

بها سکارا می گوید: در این حالت، واحدهای منفی طرف اول چنانند که

واحدهای طرف دوم از آنها کمتر است. به همین مناسبت، می توان هم جواب

مثبت و هم جواب منفی را به حساب آورد و دومقدار را برای مجهول ، قبول کرد: ۴۸ و ۱۶.

۱۰۸. مسأله، منجر به حل این معادله می شود:

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$$

که ریشه های آن عبارتند از: $x_1=50$ ، $x_2=5$. بهاسکارا، در نتیجه گیری خود، یادآوری می کند: «از آن جا که $3-\frac{1}{5}x$ ، عددی منفی است ، بنابراین، تنها ریشه اول را در نظر می گیریم».

ولی کریشناپاتا ، مفسر بهاسکارا می گوید که : اگر در شرط مسأله گفته می شد ، یک پنجم میمون ها را از ۳ کم کنیم ، آن وقت، ریشه دوم با شرط های مسأله سازگار بود، نه ریشه اول.

۱۰۹. معادله ای که با شرط های مسأله می سازد؛ چنین است:

$$\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+6+3+1=x$$

این معادله، بعد از ساده کردن، چنین می شود:

$$x^2-104x+400=0$$

و از آن جا

$$x=52\pm\sqrt{52^2-400}=52\pm48$$

به این ترتیب، دو جواب به دست می آید: $x_1=100$ و $x_2=4$. ولی ، با کمی دقت، روشن می شود که تنها جواب اول با شرط های مسأله سازگار است. ۱۱۰. مسأله، منجر به حل این معادله می شود:

$$x=10\sqrt{x}+\frac{1}{8}x+6$$

که از آن جا، اگر $\sqrt{x}=u$ بگیریم، به این معادله می رسیم:

$$7u^2-80u-48=0$$

با استفاده از رابطه بهاسکارا، به دست می آید:

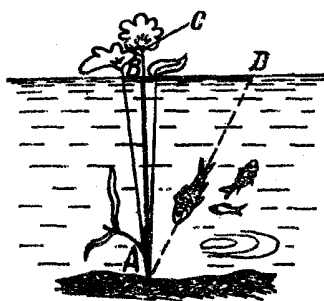
$$u = \frac{80 + \sqrt{6400 + 1344}}{14}$$

و از آن جا

$$u = \frac{80 + 88}{14} = \frac{168}{14} = 12$$

و بنابراین: $x_1 = u^2 = 144$.

بهاسکارا، جواب دوم را نمی‌دهد، زیرا متناظر با مقدار منفی برای u است. ضمناً، برای x هم، مقدار کسری به دست می‌آید که با واقعیت نمی‌سازد. (تعداد قوها، نمی‌تواند عددی کسری باشد).



شکل ۴۰

۱۱۱. با توجه به شکل ۴۰، می‌توان مسأله را، به این ترتیب، تنظیم کرد: «گلی $\frac{1}{4}$ پا از آب بیرون است. اگر آن را خم کنیم، تا به نقطه D، در ۲ پایی جای اول آن برسد، در زیر آب قرار می‌گیرد عمق دریاچه، یعنی طول پاره خط AB را پیدا کنید».

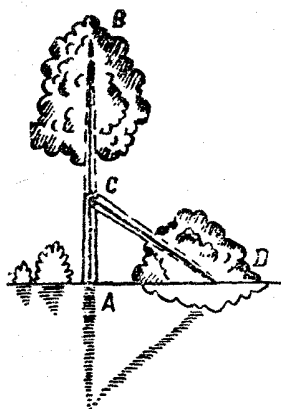
با توجه به شکل داریم:

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + 2^2$$

که به سادگی قابل حل است و به دست می‌آید:

$$x = 3\frac{3}{4} \text{ (پا)}$$

۱۱۲. با توجه به شکل ۴۱ و



شکل ۴۱

شرطهای مسأله، تنه AB از نقطه C به ارتفاع ۴ پا شکسته و رأس آن، در نقطه D، ۴ پایی نقطه A به زمین افتاده است. باید ارتفاع تنه را پیدا کنیم.

مسأله، به سادگی حل می شود:

$$AB = AC + CD = AC + \sqrt{AC^2 + AD^2} =$$

$$= 3 + \sqrt{9 + 16} = 3 + 5 = 8 \text{ (پا)}$$

۱۱۳. با استفاده از «قاعده معکوس» به دست می آید.

$$\sqrt{4} = 2; \quad 2 + 1 = 3; \quad 3^2 = 9; \quad 9 - 6 = 3;$$

$$3 \times 5 = 15; \quad 15 : 3 = 5$$

«قاعده معکوس»، که به طور گسترده ای مورد استفاده هندی ها بوده است،

بعدها به سایر کشورها هم سرایت کرده است: ابتدا در سرزمین «خلفا» و سپس از آن جا به کشورهای اروپایی.

۱۱۴. با استفاده از علامت گذاری های امروزی، نشان می دهیم که،

ریاضی دانان هندی، چگونه معادله «پهلی» را حل می کرده اند. ابتدا، عددهای b_1 و b_2 را x_1, y_1 و x_2, y_2 را در نظر می گیریم. سپس، عددهای b_1 و b_2 را طوری انتخاب می کنیم که برابری های زیر برقرار باشند:

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2$$

$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2$$

و یا

$$y_1^2 - ax_1^2 = b_1$$

$$y_2^2 - ax_2^2 = b_2$$

اگر دو معادله اخیر را در هم ضرب کنیم، سر آخر به دست می آید:

$$(ax_1 x_2 + y_1 y_2)^2 - a(x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = b_1 b_2$$

اکنون اگر $y_1 = y_2$ ، $x_1 = x_2$ و در نتیجه $b_1 = b_2$ بگیریم، معادله اخیر چنین می شود:

$$a(2x_1 y_1)^2 + b_1^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

دو طرف را بر b_1^2 تقسیم می کنیم:

$$a\left(\frac{2x_1 y_1}{b_1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}\right)^2$$

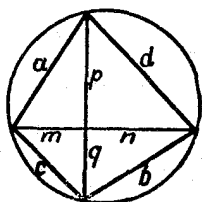
و بنابراین

$$x = \frac{ax_1 y_1}{b_1}, \quad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}$$

به این ترتیب است که دانشمندان هندی، جوابهای گویای معادله را پیدا می کردند. در بعضی موارد هم، ریاضی دانان هندی، x_1 و y_1 را طوری می گرفتند که جوابها، عددهایی درست باشند.

۱۱۵. باید ثابت کنیم:

$$a^2 + b^2 = D^2, \quad C^2 + d^2 = D^2$$



شکل ۴۲

D را قطر چهارضلعی محیطی در نظر گرفته ایم.

حتی در قدیم، ارشمیدس هم، از این رابطه آگاه بود:

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = D^2$$

(این رابطه را، خودتان ثابت کنید).

از طرف دیگر، بنابه قضیه فیثاغورث داریم:

$$m^2 + p^2 = a^2, \quad n^2 + q^2 = b^2$$

بنابراین

$$a^2 + b^2 = D^2$$

به همین ترتیب:

$$m^2 + q^2 = c^2, \quad a^2 + p^2 = d^2$$

و بنابراین

$$c^2 d^2 = D^2$$



• مساله‌های ایرانی

یادداشت تاریخی

قبلاً به این نکته اشاره کنیم که در بیشتر کتابهای تاریخی، وقتی از «فرهنگ عربی» صحبت می‌شود، به معنای فرهنگی است که در سرزمین‌های گوناگون تحت سلطه عرب‌ها پا گرفته است. به همین علت، فرهنگ ایرانی هم، در دوران بعد از تسلط عرب‌ها، غالباً به همین نام ذکر شده است. فرهنگ این ملت‌ها، یعنی ملت‌های آسیای میانه، ماوراء قفقاز - و به خصوص ایرانی‌ها - در دوره‌ای که نزدیک به پنج سده را در بر می‌گیرد - از سده نهم تا سده شانزدهم میلادی - درخششی فوق‌العاده داشته است.

دانشمندان آسیای میانه در زمینه حساب، دستگاه موضعی عدد نویسی شصت‌شصتی را تکامل دادند، دستگاهی که در آن، عدد ۶۰، به عنوان مبنای عدد شماری و عدد نویسی قرارداد؛ کسرهای دهدهی را کشف کردند و دستگاه موضعی عدد نویسی دهدهی را، به صورت گسترده‌ای، معمول کردند.

از میان بزرگترین دانشمندان این دوره، می‌توان از محمدابن موسی خوارزمی (سده نهم)، ابوالوفا (سده دهم)، ابن سینا (سده یازدهم)، بیرونی (سده یازدهم)، حکیم عمر خیام (سده دوازدهم)، خواجه نصیرالدین طوسی (سده سیزدهم)، غیاث‌الدین جمشیدکاشانی (سده چهاردهم) و غیر آن نام برد. (ضمن حل مساله‌ها، همه‌جا، از نشانه‌های امروزی استفاده شده است.)

۱۱۶. اگر معادله‌های درجه دوم را، با روش عادی حل کنیم، به دست

می‌آید:

$$۱) x_1 = 0, \quad x_2 = 8;$$

$$۲) x_1 = 6, \quad x_2 = -6;$$

$$۳) x_1 = 7, \quad x_2 = 3;$$

$$۴) x_1 = 24, \quad x_2 = -12;$$

$$۵) x_1 = 9, \quad x_2 = \frac{9}{4}$$

$$۶) x_1 = 12, \quad x_2 = -19$$

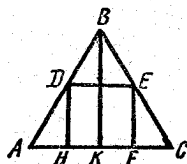
*

این مساله، از کتاب «حساب الجبر والمقابل» محمد بن موسی خوارزمی، ریاضی‌دان مشهور دهه‌های اول سده نهم، برداشته شده است. موطن او خوارزم بود؛ که امروز در جمهوری ازبکستان شوروی و در قسمت سفلی رودخانه آمور قرار دارد.

خوارزمی، رساله‌های زیادی نوشته است که، از میان آن‌ها، دو رساله، یکی درباره جبر و دیگری درباره حساب، اهمیت بیشتری دارد.

رساله مشهور «الجبر والمقابل» را در حدود سال ۸۳۰ میلادی نوشته است که، به نظر می‌رسد، یک کتاب درسی برای جوانان باشد.

باید یادآوری کرد که اصطلاح «جبر»، که امروز درهمه زبان‌ها و اکثر به صورت «الجبر» باقی مانده است، از نام همین کتاب خوارزمی گرفته شده است.



شکل ۴۳

ذکر این مطلب هم ضروری است که واژه «آلگوریتم»، که امروزه معنای پیدا کردن روش‌های کلی حل مساله‌های ریاضی به کار می‌رود، شکل لاتینی شده نام «الخوارزمی» است.

۱۱۷. ابتدا طول ارتفاع مثلث مفروض ABC را پیدا می‌کنیم
(شکل ۴۳):

$$BK = \sqrt{150 - 36} = 8$$

سپس، از تشابه دو مثلث ABC و DBE به دست می‌آید:

$$\frac{x}{8-x} = \frac{12}{8}$$

که در آن، x عبارت است از طول ضلع مربع مورد نظر. از این معادله به دست می‌آید:

$$x = 4\frac{4}{5}$$

۱۱۸. خوارزمی، این مساله را با «روش فرضی» و به این ترتیب حل می‌کند: فرض می‌کنیم، عدد مجهول ۱۲ باشد، در این صورت، باقی مانده، به جای ۸، برابر ۵ می‌شود، یعنی ۳ واحد کمتر. اگر عدد مجهول را ۲۴ بگیریم، باقی مانده، به جای ۸، برابر ۱۰ می‌شود، یعنی ۲ واحد بیشتر. بنابراین

$$\frac{3 \times 24 + 12 \times 2}{3 + 2} = 19\frac{1}{5}$$

۱۱۹. مساله، به این ترتیب، حل می‌شود:

فرض کنیم $M = 9n + 1$ ، آن وقت داریم:

$$M^2 = 81n^2 + 18n + 1 = (9 \text{ مضرب}) + 1$$

اکنون فرض می‌کنیم $M = 9n + 8$. داریم:

$$M^2 = 81n^2 + 144n + 64 = 9(9n^2 + 16n + 7) + 1 = (9 \text{ مضرب}) + 1$$

قبل از حل مساله، از این اتحاد آگاهی داده می‌شود:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

*

مؤلف این مساله، بوعلی سینا، دانشمند ایرانی است که آثار فراوانی در زمینه‌های گوناگون دانش دارد. بوعلی سینا، در حدود سال ۹۸۰ میلادی متولد شد و در سال ۱۰۳۷ میلادی از جهان رفت. از همان دوران جوانی،

دانشمندی مشهور بود و به حرفه‌های مختلفی دست زد. او اخترشناسی بزرگ، ریاضی دانی برجسته، شیمی دانی مشهور، ضمناً، پزشکی با استعداد و پژوهشگر بود. ابن سینا موفقیت‌های هم‌عصران و پیشینیان خود را تکامل داد و مساله‌های تازه‌ای در زمینه ریاضیات، طرح و حل کرد. بحث و تفسیر ابن سینا از تالیف هندسی اقلیدس - که به نام عمومی «مقدمات» مشهور شده است - نقش عمده‌ای در پیشرفت دانش ریاضی داشته است.

ابن سینا، در بسیاری از زمینه‌های دانش نوآور بود و، به همین مناسبت، اغلب مورد آزار قرار می‌گرفت خود او را به زندان انداختند و کتاب‌هایش را آتش زدند.

تاریخ‌نویسان، از ابن سینا به عنوان انسانی یاد می‌کنند که به نیروی مغلوب‌نشدنی عقل اعتقاد داشت و در تمامی دوران زندگی خود، علیه جهل و باورهای غیر علمی و غیر عقلانی مبارزه می‌کرد. تنها یکی از نوشته‌های ریاضی ابن سینا به ما رسیده است که به حساب مربوط می‌شود، این رساله، جزو کتاب پزشکی ابن سینا به نام «شفا» وجود دارد که در کتابخانه لیدن در انگلستان، نگهداری می‌شود.

۱۲۰. کرجی به این ترتیب استدلال می‌کند. طبق فرض مساله داریم:

$$x(3 + \sqrt{5}) = 1$$

یا

$$3x + x\sqrt{5} = 1$$

از آن جا

$$3x + \sqrt{5x^2} = 1$$

معادله اخیر را می‌توان این طور نوشت:

$$\sqrt{5x^2} = 1 - 3x$$

اگر دو طرف را مجذور کنیم، به دست می‌آید:

$$5x^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

از آن جا

$$4x^2 - 6x + 1 = 0$$

باحل این معادله درجه دوم، خواهیم داشت:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

و کرجی، به عنوان عدد مورد نظر، ریشه

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

را انتخاب می کند.

راه حل عادی مسأله کرجی، بسیار ساده است. درواقع، از معادله

$$x(3 + \sqrt{5}) = 1$$

به دست می آید:

$$x = \frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

*

کرجی (ابوبکر محمد بن حسن کرجی)، ریاضی دان ایرانی سده یازدهم میلادی است. اوصاحب نوشته های زیادی در ریاضیات است که تنها دو تا از آنها به ما رسیده است. اولی «کافی فی الحساب» و دومی «الفخری» که تالیف بزرگی در جبر و دنباله کتاب اول است. کرجی کتاب دوم خود را به افتخار «فخرالملک» - که تا حد زیادی هوادار دانش و دانشمندان بود و در سال ۱۰۱۷ میلادی درگذشت - نامیده است.

۱۲۱. استدلال کرجی را می آوریم. از معادله آخر داریم:

$$y = \frac{10}{x}$$

با در نظر گرفتن این مقدار y ، معادله دوم چنین می شود:

$$z = \frac{100}{x^3}$$

در این صورت، معادله اول این دستگاه، به این صورت درمی آید:

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$$

$$x^8 + 100x^4 - 10000 = 0$$

یا

اگر این معادله را، همچون معادله درجه دومی، نسبت به x^4 ، حل کنیم، به دست می آید:

$$x^4 = -50 + \sqrt{12500}$$

و بنابراین

$$x = \sqrt[4]{\sqrt{12500} - 50}$$

۱۲۲. اگر عرض مستطیل را x بگیریم، طول آن برابر $2x$ ، مساحت آن برابر $2x^2$ و محیط آن برابر $6x$ می شود. و بنابر فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$2x^2 = 6x$$

بنابراین، $x = 3$ و مساحت مستطیل مورد نظر برابر ۱۸ واحد مربع می شود.

۱۲۳. $\frac{1}{x} = z$ می گیریم. در این صورت، معادله مفروض، چنین می شود:

$$z^2 + 2z = \frac{5}{4}$$

اگر يك واحد به دو طرف معادله اضافه کنیم، به دست می آید:

$$z^2 + 2z + 1 = \frac{9}{4}$$

یا

$$(z+1)^2 = \frac{9}{4}$$

از آن جا

$$z+1 = \pm \frac{3}{2}$$

یا

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = -\frac{5}{2}$$

و بنابراین

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{2}{5}$$

*

مؤلف این مسأله، حکیم عمر خیام، دانشمند، ریاضی‌دان، شاعر و فیلسوف ایرانی است (۱۰۴۵-۱۱۲۳)، که از همان دوران جوانی نسبت به دانش ریاضی علاقه نشان می‌داد. خیام در کتاب «جبر و مقابله» خود، به تفصیل درباره معادله‌های درجه اول و درجه دوم بحث می‌کند و راه ساختن ریشه‌های معادله درجه سوم را، به طریق هندسی، داده است. خیام نخستین کسی است که روش حل معادله‌های درجه سوم را می‌دهد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه را طرح می‌ریزد.

خیام به خاطر رباعی‌های خود هم شهرت دارد که بسیار زیبا و شامل مفهومی‌های اجتماعی و فلسفی عمیقی است.

۱۲۴. مسأله، به سادگی قابل حل است. اگر قسمت کوچکتر را x بگیریم، قسمت بزرگتر برابر $x+5$ می‌شود و، بنا بر فرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$2x+5=10$$

از آن جا، $2x=5$. بنابراین، قسمت کوچکتر برابر $2\frac{1}{4}$ و قسمت بزرگتر برابر $7\frac{1}{4}$ می‌شود.

*

بهاء‌الدین عاملی، معرف به «شیخ بهائی» مؤلف این مسأله، یکی از ریاضی‌دانان ایرانی سده شانزدهم است. بهاء‌الدین، رساله جالبی دارد به نام «خلاصه الحساب» این مسأله از همان جا برداشته شده است.

۱۲۵. بهاء‌الدین، برای حل این مسأله، چنین استدلال می‌کند: یکی از عددها را $x-10$ می‌گیریم، در این صورت، عدد دوم برابر $x+10$ می‌شود، بنا به فرض مسأله، باید داشته باشیم:

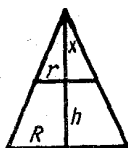
$$100-x^2=96$$

از آن جا

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین، قسمت بزرگتر برابر ۱۲ می شود که سهم زید است.
۱۲۶. با توجه به مثلث ها (شکل

(۴۴) داریم:



شکل ۴۴

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R}$$

$$x(R-r) = rh$$

$$x = \frac{rh}{R-r}$$

۱۲۷. حل مسأله با «روش معکوس»

$$50 : 10 = 5; \quad 5 \times 5 = 25; \quad 25 - 3 = 22;$$

$$22 : 2 = 11; \quad 11 - 2 = 9; \quad \sqrt{9} = 3$$

۱۲۸. از مثلث قائم الزاویه

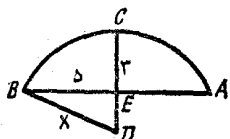
BED (شکل ۴۵)، به دست می آید:

$$(x-3)^2 + 5^2 = x^2;$$

$$x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2;$$

$$6x = 34; \quad 3x = 17;$$

$$x = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} \quad (\text{ارش})$$



شکل ۴۵

*

غیاث الدین جمشید کاشانی، معروف به کاشی، ریاضی دان ایرانی، دو رساله مهم دارد: «مفتاح الحساب» و «رسالة المحيطیه». تاریخ تولد و مرگ کاشی، دقیقاً معلوم نیست. گمان می رود که در ثلث آخر یا ابتدای ربع آخر سده چهاردهم متولد شده باشد. کاشی نه تنها ریاضی دان، بلکه پزشک هم بود. او راهنمای ساختمان رصدخانه بزرگ سمرقند بود که به دستور الغ بیگ اخترشناس ساخته شد. کاشی در «رسالة المحيطیه»، مقدار عدد π را تا ۱۷ رقم درست اعشار محاسبه کرده است که دقیق ترین مقدار π تا آن زمان است. کاشی، همچنین واضح کسرهای دهدهی است و با حل معادله درجه سوم

مربوط، مقدار سینوس يك درجه را به دست آورد.

۰۱۲۹. اثبات را با روش استقرای ریاضی می دهیم.

(۱) ثابت می کنیم، تساوی کاشی، برای $n=1$ درست است. در واقع

$$1 = \frac{1}{30}(6+15+10-1) = 1$$

(۲) فرض می کنیم، برابری برای $n=k$ درست باشد، یعنی داشته

باشیم:

$$1^4 + 2^4 + \dots + k^4 = \frac{1}{30}(6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k)$$

(۳) ثابت می کنیم که، در این صورت، برابری برای $n=k+1$ هم

درست است:

$$1^4 + 2^4 + \dots + k^4 + (k+1)^4 =$$

$$= \frac{1}{30}[6(k+1)^5 + 15(k+1)^4 + 10(k+1)^3 - (k+1)] \quad (1)$$

با توجه به برابری قبل، سمت چپ رابطه (۱) را می توان این طور نوشت:

$$1^4 + 2^4 + \dots + k^4 + (k+1)^4 =$$

$$= \frac{1}{30}(6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k) + (k+1)^4 \quad (2)$$

اکنون کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{1}{30}(6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k) + (k+1)^4 =$$

$$= \frac{1}{30}[6(k+1)^5 + 15(k+1)^4 + 10(k+1)^3 - (k+1)]$$

یعنی باید، به ترتیب، ثابت کنیم:

$$6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k + 30(k+1)^4 =$$

$$= 6(k+1)^5 + 15(k+1)^4 + 10(k+1)^3 - (k+1);$$

یا

$$6k^5 + 15k^4 + 10k^3 + 1 = 6(k+1)^5 - 15(k+1)^4 + 10(k+1)^3;$$

یا

$$6k^5 + 15k^4 + 10k^3 + 1 = 6k^5 + 15k^4 + 10k^3 + 1$$

درستی برابری اخیر روشن است. بنابراین، درستی برابری کاشی هم ثابت می‌شود.

۰۷. مسأله‌های روسی

۱۳۰. مؤلف رساله، مسأله را این طور حل کرده است: نجار اول در ۱۲ سال کار ۱۲ کاخ را انجام می‌دهد؛ در همین مدت، نجار دوم کار ۶ کاخ، نجار سوم کار ۴ کاخ و نجار چهارم کار ۳ کاخ را انجام می‌دهد. بنابراین، این چهار نفر، در ۱۲ سال، کار نجاری ۲۵ کاخ را تمام می‌کنند؛ یعنی چهار نفری کار يك کاخ را در $\frac{1}{5}$ ۱۷۵ روز انجام می‌دهند:

$$\frac{365 \times 12}{25} = 175 \frac{1}{5} \text{ (روز)}$$

*

نخستین آگاهی‌ها، درباره پیشرفت ریاضیات در روسیه، به سده‌های نهم تا دوازدهم برمی‌گردد. سندهای ریاضی (دست نویس‌ها)، که به دوره‌های بعد مربوط می‌شود، مربوط به سده‌های پانزدهم تا هفدهم است. این مسأله، از يك رساله قدیمی مربوط به سده هفدهم برداشته شده است که شامل قانون‌هایی از حساب، همراه با مثال‌ها و مسأله‌های بسیاری است. رساله، دارای این مقاله‌هاست: (۱) «مقاله بازرگانی» که شامل مثال‌های زیادی در مورد محاسبه قیمت کالاها، سود، زیان و امثال آن است؛ (۲) «مقاله درباره ناخالصی در هر کالایی»، که در آن درباره قانون‌های اختلاط و امتزاج صحبت شده است و مسأله‌های زیادی درباره محاسبه ارزش مخلوط‌ها و آلیاژهای طلا، نقره و مس دارد؛ (۳) «مقاله مبادله کالا» که درباره مبادله

کالاهایی که ارزش آنها معلوم است، صحبت می کند؛ ۴) «مقاله سرمایه گذاری»، که در آن، از به اصطلاح اشتراك سرمایه صحبت می کند.

۱۳۱. شیر و گریگ و سگ، در يك ساعت $1\frac{5}{6}$ میش را می خورند.

در واقع:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$$

بنابراین، يك میش را در $\frac{6}{11}$ ساعت خواهند خورد.

نویسنده رساله، مسأله را این طور حل کرده است: در ۱۲ ساعت، شیر ۱۲ میش، گریگ ۶ میش و سگ ۴ میش را می خورند؛ بنابراین، در ۱۲

ساعت، ۲۲ میش را خواهند خورد. پس در يك ساعت $\frac{11}{6}$ میش و يك میش را

در $\frac{6}{11}$ ساعت می خورند.

۱۳۲. نویسنده رساله، تنها جواب را داده است: ۷۲۱ تخم مرغ. ظاهراً، او با مفهوم کوچکترین مضرب مشترك آشنا نبوده است و، به همین مناسبت، کوچکترین جواب ممکن را نداده است. کوچکترین جواب ممکن، عبارت است از ۴۹ تخم مرغ.

۱۳۳. این مسأله را از کتاب «حساب» آ.ف ماگینتسکی برداشته ایم، که برای نخستین بار، در سال ۱۷۵۳ میلادی چاپ شده است. برای حل مسأله باید توجه داشت که هر «آلتین» برابر ۳ کوپک و هر «دنگا» برابر $\frac{1}{2}$ کوپک است.

راه حل خود ماگینتسکی را می دهیم: ۱۰۰ گوسفند پیر و ۱۲۰ گوسفند جوان خریده شده است. به این دلیل

$$\begin{array}{r} - 46 \text{ کوپک برای هر گوسفند پیر} \\ 30 \text{ کوپک برای هر گوسفند جوان} \\ \hline 16 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 112X \\ 30 \\ \hline 3360 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4960 - \\ 3360 \\ \hline 1600 \end{array}$
--	--

$$1600 : 16 = 100$$

*

لئونتی فیلیپوویچ ماگینتسکی (۱۶۶۹-۱۷۳۹)، معلم ریاضیات در مدرسه دانش‌های دریایی در مسکو که به وسیله «پتر اول» در سال ۱۷۰۱ بنیان‌گذاری شده بود. ماگینتسکی، در سال ۱۷۰۳، کتاب «حساب» خود را، که نخستین کتاب درسی از نوع خود در روسیه بود، چاپ کرد. در کتاب، از عددنویسی هندی-که به غلط به عددنویسی عربی شهرت یافته است-استفاده شده است و شامل مسأله‌ها و مثال‌های زیادی است که، ضمناً، معماها و مطالب سرگرم‌کننده‌ای، همراه با تصویرهای جالبی هم به آن اضافه شده است.

این کتاب، گرچه نام «حساب» را بر خود دارد، در واقع، مجموعه‌ای از ریاضیات مقدماتی است و در آن، علاوه بر حساب، مسأله‌هایی از جبر و هندسه و کشتی رانی هم وجود دارد.

«حساب» ماگینتسکی، تا میانه‌های سده هیجدهم، یک کتاب درسی همگانی بود.

۱۳۴. این مسأله را ماگینتسکی با «روش خطاها» حل کرده است، روشی که در کتاب او، اهمیت زیادی دارد.

ابتدا تعداد شاگردان را ۲۴ می‌گیریم (فرض اول). آن وقت شرط‌های مسأله را دنبال می‌کنیم: همان تعداد، نصف آن‌ها، یک چهارم آن‌ها و سر آخر یک نفر، اضافه می‌کنیم:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67$$

طبق فرض، باید این مجموع برابر ۱۰۰ باشد؛ به اندازه ۶۷-۱۰۰ یعنی ۳۳ نفر کم آورده‌ایم (خطای اول).

اکنون تعداد شاگردان را ۳۲ نفر می‌گیریم (فرض دوم)، آن وقت به دست می‌آید

$$۳۲+۳۲+۱۶+۸+۱=۸۹$$

که نسبت به ۱۰۰، به اندازه ۱۱ نفر کم دارد (خطای دوم)
اکنون طبق رابطه داریم:

$$\frac{۳۳ \times ۳۲ - ۲۴ \times ۱۱}{۳۳ - ۱۱} = ۳۶ \quad (\text{شاگرد})$$

۱۳۵. خریدار باید مبلغ بیشتری و خیلی بیشتر، بپردازد، او باید بابت

۲۴ میخ نعل‌ها به اندازه

$$۱+۲+۲۲+۲۳+\dots+۲۲۳$$

واحد $\frac{۱}{۴}$ کوپکی بپردازد که برابر ۴۱۹۴۳ روبل و $\frac{۳}{۴}$ کوپک است.

۱۳۶. توجه کنیم که: ۱ «ستوپ» برابر است با $\frac{۱}{۲}$ آرشین. در قاعده خیمه

۶۰ آرشین و در مولد آن ۱۶ آرشین داریم.

چون خیمه به شکل مخروط است، سطح جانبی آن چنین می‌شود:

$$\frac{۶۰ \times ۱۶}{۲} = ۴۸۰ \quad (\text{آرشین مربع})$$

حالا، می‌توان معلوم کرد که چند آرشین ماهوت لازم داریم:

$$۴۸۰ : ۲\frac{۱}{۲} = ۴۸۰ : \frac{۵}{۲} = ۱۹۲ \quad (\text{آرشین})$$

که برای آن‌ها، باید ۱۹۲×۲ ، یعنی ۳۸۴ روبل بپردازد.

۱۳۷. عدد مجهول را x می‌گیریم، بنابراین شرط مسئله باید داشته باشیم:

$$x = ۲q_1 + ۱; \quad x = ۴q_3 + ۳;$$

$$x = ۳q_2 + ۲; \quad x = ۵q_4 + ۴$$

$$x + ۱ = ۲q_1 + ۲ = ۲(q_1 + ۱); \quad \text{از آن جا}$$

$$x + ۱ = ۳q_2 + ۳ = ۳(q_2 + ۱);$$

$$x + ۱ = ۴q_3 + ۴ = ۴(q_3 + ۱);$$

$$x + ۱ = ۵q_4 + ۵ = ۵(q_4 + ۱)$$

از چهار برابری اخیر، معلوم می‌شود که $x + ۱$ باید بر ۵، ۴، ۳، ۲

بخش پذیر باشد. بنابراین، کمترین مقدار $x+1$ عبارت است از کوچکترین مضرب مشترک این چهار عدد؛ یعنی ۶۰. بنابراین، کوچکترین جواب مسأله، عدد ۵۹ می شود.

۱۳۸. فرض کنیم، به روزی از هفته فکر کرده است که با عدد x نشان داده می شود، بنابراین، این عمل ها روی آن انجام شده است:

(۱) این عدد را در ۲ ضرب کرده است:

$$x \times 2 = 2x$$

(۲) به حاصل ضرب، ۵ واحد اضافه کرده است:

$$2x \times 5$$

(۳) مجموع را ۵ برابر کرده است:

$$(2x + 5) \times 5 = 10x + 25$$

(۴) حاصل ضرب را در ۱۰ ضرب کرده است و نتیجه را به شما گفته است:

$$100x + 250$$

اگر از این عدد ۲۵۰ واحد کم کنیم، به دست می آید

$$100x$$

که به کمک آن، به سادگی، مقدار x معلوم می شود.

ما گنیتسکی، نتیجه را روی مثال عددی آزمایش می کند: فرض کنیم،

به جمعه (یعنی عدد ۶) فکر کرده است: $x = 6$

$$۱) \quad 2x = 12;$$

$$۲) \quad 2x + 5 = 17;$$

$$۳) \quad (2x + 5) \times 5 = 17 \times 5 = 85;$$

$$۴) \quad 100x + 250 = 85 \times 10 = 850;$$

$$۵) \quad 100x + 250 - 250 = 850 - 250 = 600;$$

$$100x = 600$$

$$x = 6 \text{ (جمعه)}$$

۱۳۹. راه حل این مسأله، بسیار ساده است. شخص در هر روز $\frac{1}{14}$

جعبه نوشابه را مصرف می کند؛ ولی اگر او را با همسرش در نظر بگیریم،

در هر روز $\frac{1}{10}$ جعبه نوشابه مصرف می شود. بنابراین، همسرش در هر روز

به اندازه $\frac{1}{10} - \frac{1}{14}$ ، یعنی $\frac{1}{35}$ جعبه را مصرف می کند. در نتیجه، همسر او برای مصرف تمامی جعبه به ۳۵ روز نیاز دارد.

۱۴۰. کارگر باید برای کار سالانه خود ۱۲ روبل و یک دست لباس

بگیرد، یعنی برای هر ماه ۱ روبل و $\frac{1}{12}$ لباس. مزد او در ۷ ماه، برابر ۷

روبل و $\frac{7}{12}$ لباس می شود. ولی او فقط ۵ روبل گرفته است. بنابراین

۲ روبل قیمت $\frac{5}{12}$ لباس است. حالا دیگر قیمت لباس به سادگی به دست می آید:

$$2 : \frac{5}{12} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ (روبل)}$$

۱۴۱. این مسأله را، گولد باخ در سال ۱۷۴۲ در نامه خود به اولر مطرح کرده است. اولر، برای اثبات حکم مسأله، از اتحاد زیر استفاده می کند:

$$4n^4 + 1 = (2n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 2n + 1)$$

از این اتحاد معلوم می شود که $4n^4 + 1$ ؛ به ازای هر عددی به جز ۱، برابر با حاصلضرب دو عدد می شود، یعنی عددی است مرکب. به ازای $n = 1$ برابر ۵ می شود که عددی است اول.

*

کریستیان گولدباخ (۱۶۹۰-۱۷۶۴)، ریاضی دان و عضو فرهنگستان علوم پترزبورگ (از سال ۱۷۲۵) متولد «که نیکسبرگ» (کالنین گرادامروز)، سال های آخر عمر را در مسکو گذرانید و در همان جا در گذشت. در طول سی سال، نامه نگاری جالب و پرمضمونی با اولر داشت. کارهای ریاضی او، به معادله های دیفرانسیلی و نظریه رشته ها مربوط است.

۱۴۲. مجموع S را، برای همه انواع کسرهای مورد نظر (که برای آنها، m و n از ۱ تا ∞ تغییر می کنند) تشکیل می دهیم:

$$S = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) + \dots;$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 \times 2};$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \times 3};$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\frac{1}{4^2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \times 4};$$

.....

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

n جمله اول مجموع S را با S_n نشان می دهیم:

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)};$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right);$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

و از آن جا

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

۱۴۳ و ۱۴۴. در نیمه اول سده هیجدهم، گولدباخ در نامه ای به دوست دانشمند خود، این حکم را - که به مسئله گولدباخ معروف شده است - مطرح

می‌کند: ثابت کنید که هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان به صورت مجموعی از سه عدد اول نوشت.

خود گولدباخ، به این مناسبت، چنین نوشته است: «این هم، یکی از مسأله‌های من است. يك عدد فرد دلخواه، و مثلاً ۷۷ را، در نظر می‌گیریم. آن را می‌توان به صورت مجموع سه عدد نوشت:

$$77 = 53 + 17 + 7$$

به نحوی که هر سه جمله جمع، عددهایی اول هستند. عدد دیگری، کاملاً دلخواه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً ۴۶۱. داریم:

$$461 = 449 + 7 + 5$$

این سه جمله جمع، باز هم، عددهایی اول اند. همین عدد را به نحو دیگری هم، می‌توان به مجموع سه عدد اول تبدیل کرد:

$$461 = 257 + 199 + 5$$

و غیره. اکنون، برای من کاملاً روشن است که: هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. ولی، این حکم را چگونه می‌توان ثابت کرد؟ هر آزمایشی، درستی حکم را تأیید می‌کند، ولی زندگی هیچ انسانی، امکان آزمایش روی همه عددهای فرد را نمی‌دهد. در این جا، به استدلالی کلی نیاز داریم، نه به آزمایش.»

اولر پاسخ داد که، این حکم، کاملاً درست است، ولی او هم نتوانسته است اثبات دقیقی برای آن پیدا کند، اولر، ضمناً، حکم دیگری را هم پیشنهاد می‌کند (مسأله اولر): هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت ولی، اولر توضیح داد که این حکم را هم نتوانسته است ثابت کند.

یادآوری می‌کنیم که، اگر مسأله اولر حل شود، می‌توان مسأله گولدباخ را، به عنوان نتیجه روشنی از آن، به دست آورد. در واقع، هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان این طور نوشت:

$$2N + 1 = 3 + 2(N - 1)$$

که در آن داریم: $2(N - 1) \geq 4$. اگر مسأله اولر درست باشد، به معنای

آن است که عدد زوج $(N-1)$ را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. آن وقت، روشن است که عدد فرد $2N+1$ به صورت مجموع سه عدد اول درمی آید و مسأله گولد باخ، برای هر عدد فرد مساوی یا بزرگتر از ۷ درست است.

ولی، به نظر می رسد که قضیه عکس درست نیست، یعنی از درستی مسأله گولد باخ، نمی توان درستی مسأله اولر را نتیجه گرفت. بنابراین، مسأله اولر دشوارتر از مسأله گولد باخ است و در عمل هم، دیرتر از آن ثابت شد.

تنها در سال ۱۹۳۵ بود که ل. گک. شین رلمان، دانشمند جوان شوروی (۱۹۰۵-۱۹۳۸) توانست مسیر درستی برای حل مسأله گولد باخ پیدا کند. او این قضیه را (که به قضیه شین رلمان معروف است) ثابت کرد: عدد ثابت k وجود دارد، به نحوی که هر عدد طبیعی بزرگتر از واحد را بتوان به صورت مجموعی از عددهای اول، که تعداد آنها از k تجاوز نمی کند، نوشت. یعنی برای هر عدد طبیعی $N (N > 1)$ داریم:

$$N = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

که در آن، p_i ، یا عددی است اول و یا صفر.

اگر بتوانیم ثابت کنیم که $k=3$ ، آن وقت، قضیه گولد باخ ثابت شده است. با تلاش بسیاری از ریاضی دانان، عدد ثابت k تا مرز ۶۷ رسید و در زمان ما تا ۲۵ پایین آمده است. ولی، هنوز تا عدد ۳، راه درازی باقی مانده است.

در سال ۱۹۳۷، حادثه ای بسیار مهم، و غیر قابل انتظار برای ریاضی-دانان، در جهان دانش اتفاق افتاد. ای. م. وینوگرادوف (متولد ۱۸۹۱)، دانشمند شوروی و عضو فرهنگستان علوم، مسأله گولد باخ را برای عددهای به اندازه کافی بزرگ فرد ثابت کرد: هر عدد فرد، از هر عدد به دلخواه بزرگی که آغاز کنیم، برابر است با مجموع سه عدد اول. به زبان دیگر، بین عددهای طبیعی، چنان عدد به اندازه کافی بزرگ وجود دارد، که هر عدد اول بعد از آن، برابر با مجموع سه عدد اول می شود.

وینوگرادوف، مسأله گولد باخ را، به مفهومی که در این جا آوردیم،

به طریقی پیچیده ثابت کرد و، ضمن آن، روشهای ظریف ریاضیات معاصر را مورد استفاده قرار داد.

وینوگرادوف، قضیه گولدباخ را، برای عددهای فرد به اندازه کافی بزرگ، یعنی برای عددهای فردی که بزرگتر از عدد بزرگی مثل N_0 باشند، ثابت کرد. ولی مقدار N_0 چقدر است؟ به این پرسش هم، ریاضی دان دیگر شوروی، ک.گ. بوروزدکین، پاسخ داد. او ثابت کرد:

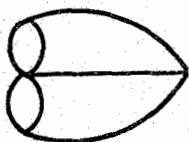
$$N_0 \geq e^{161038}$$

که در آن e ، عبارت است از مبنای لگاریتم طبیعی، یعنی $e = 2.71828...$. برای این که مسأله گولدباخ به طور کامل حل شود، باید برای عددهای فرد کوچکتر از N_0 مورد آزمایش قرار گیرد. کانتور، آبری، هالاسینر و دیگران، مسأله گولدباخ را مستقیماً مورد آزمایش قرار داده بودند. و آزمایش نشان داده بود که، مسأله گولدباخ، برای عددهای فرد و زوج تا ۹۰۰۰۰۰۰۰ درست است.

روش وینوگرادوف که، به کمک آن، مسأله گولدباخ حل شد، برای حل مسأله اولر، مبنی بر این که هر عدد زوج را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت، نتوانست کاری انجام دهد.

مسأله اولر، هنوز حل نشده باقی مانده است. مسأله گولدباخ هم، برای عددهای طبیعی زوج، حل نشده است (خود گولدباخ، این حالت را تنظیم نکرده بود). اگرچه، از قضیه وینوگرادوف، می توان نتیجه گرفت که هر عدد زوج به اندازه کافی بزرگ را می توان به صورت مجموع چهار عدد اول نوشت (خودتان می توانید این حکم را ثابت کنید).

۱۴۵. این مسأله، در سال ۱۷۵۰



شکل ۴۴

تنظیم شده است خود لئونارد اولر، در همان سال، آن را حل کرد و ثابت کرد که عبور از همه پل ها، و ضمناً از هر پل یک بار، ممکن نیست. شرط های مسأله

اولر درباره پل های کینگزبرگ، معادل با این شرط است که بخواهیم شکل ۴۴ را رسم کنیم، بدون این که قلم را از کاغذ برداریم و بدون این که بخشی از

آن را دوبار رسم کنیم، توصیه می‌کنیم، خودتان این مسأله را حل کنید.

*

لئونارد اولر (۱۷۵۷-۱۷۸۳)، ریاضی دانی بزرگ و دوست نزدیک م. و. لومونسوف بود.

اولر در شهر بال سوئیس متولد شد. آموزش‌های اولیه خود را، در منزل و نزد پدرش، به دست آورد. آموزش ریاضی خود را، تحت راهنمایی یوهان برنولی، ریاضی دان بزرگ سوئیس تکمیل کرد.

در ۱۹ سالگی، رساله علمی خود را درباره تجهیز کشتی نوشت که، به خاطر آن، جایزه فرهنگستان علوم پاریس را به او دادند. در ۲۵ سالگی به فرهنگستان علوم پترزبورگ راه یافت و در ۲۳ سالگی، استاد کرسی فیزیک شد و در ۲۶ سالگی به عضویت رسمی فرهنگستان علوم پترزبورگ درآمد.

اولر استعداد فوق‌العاده‌ای در کار داشت. او روی هم ۸۶۵ اثر بکر دارد که چند ده جلد را تشکیل می‌دهند. علاقه‌های علمی اولر، بسیار متنوع بود. او تقریباً در همه زمینه‌های ریاضیات مقدماتی و ریاضیات عالی، در زمینه مکانیک و اخترشناسی، کشف‌های پرارزشی دارد. اولر، کتابی درباره جبر نوشت به نام «ورود کامل به جبر» (۱۷۷۵)، که می‌توان آن را نمونه کتاب‌های درسی امروزی در این رشته دانست.

اولر، بیش از ۳۵ سال از زندگی خود را در روسیه گذراند و روز ۷ سپتامبر سال ۱۷۸۳ در پترزبورگ درگذشت.

۱۴۶. بهترین روش حل این مسأله، چنین است: فرض می‌کنیم، تعداد تخم‌مرغ‌های دهقان دوم m برابر تعداد تخم‌مرغ‌های دهقان اول باشد. چون پول فروش دو دهقان باهم برابر است، دهقان اول باید هر تخم مرغ را m برابر فروش هر تخم مرغ دهقان دوم فروخته باشد. اگر این دو دهقان، تعداد تخم‌مرغ‌های خود را باهم عوض کنند، آن وقت، دهقان اول m برابر دهقان دوم تخم مرغ خواهد داشت و چون هر تخم مرغ را به m برابر گران‌تر از دومی می‌فروشد، بنابراین، m^2 برابر دومی پول دریافت می‌کند. از آن جا

$$m^2 = 15:6 \frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$$

بنابراین

$$m = \frac{3}{2}$$

اگر ۱۰۰ را به نسبت ۳:۲ تقسیم کنیم، معلوم می‌شود که دهقان اول ۴۰ و دهقان دوم ۶۰ تخم مرغ داشته‌اند.

این مساله را، به طریق جبری هم می‌توان حل کرد. اگر تعداد تخم مرغ‌های دهقان اول را x بگیریم، تخم مرغ‌های دهقان دوم برابر $100 - x$ می‌شود و، از آن‌جا، قیمت فروش همه تخم مرغ‌های دهقان اول برابر

$$\frac{15}{100 - x}$$

و قیمت فروش هر تخم مرغ دهقان دوم برابر

$$6\frac{2}{3}:x = \frac{20}{3x}$$

می‌شود. چون پول فروش دودهقان، یکی است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}$$

یا

$$x^2 + 160x - 8000 = 0$$

از آن‌جا: $x_1 = 40$ ، $x_2 = -200$. یعنی، دهقان اول ۴۰ و دهقان دوم ۶۰ تخم مرغ داشته‌اند.

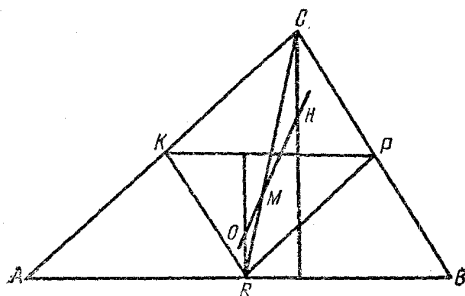
۱۴۷. پاسخ: $4 + \sqrt{2}$.

۱۴۸. ABC را مثلث دلخواه مفروضی در نظر بگیرید (شکل ۴۷).

مثلث PKR را - که وسط ضلع‌های مثلث ABC را به هم وصل کرده است -

می‌سازیم. مثلث PKR با مثلث ABC متشابه و ضریب تشابه آن $k = \frac{1}{2}$

است. با توجه به این مطلب، معلوم می‌شود که نقطه M، محل برخورد



شکل ۴۷

میان‌های مثلث PKR است، زیرا میان‌های مثلث اخیر، بخش‌هایی از میان‌های مثلث ABC هستند، سپس، توجه می‌کنیم که مرکز دایره محیطی مثلث ABC (نقطه O) بر محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC منطبق است. H را نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC می‌گیریم. از M به O و H وصل می‌کنیم. دو مثلث ROM و CHM متشابه‌اند و ضریب تشابه آن‌ها برابر است با $k = \frac{1}{4}$ (زیرا، این مثلث‌ها از خط‌های متناظر مثلث‌های ABC و PKR تشکیل شده‌اند و ضریب تشابه دو مثلث KPR و ABC هم برابر $\frac{1}{4}$ بود)، از آن‌جا

$$\widehat{RMO} = \widehat{CMH}$$

با توجه به این برابری و این که CMR یک خط راست است، به این نتیجه می‌رسیم که زاویه‌های RMO و CMH را می‌توان همچون دوزاویه متقابل به‌راس در نظر گرفت، و بنابراین، OMH خطی راست است؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این مساله را اولر، برای نخستین بار، در سال ۱۷۶۵ حل کرد، که آغازی بود برای به‌اصطلاح «هندسه مثلث».

۱۴۹. به ترتیب داریم:

$$\frac{x^4}{1 - \frac{1}{2}x} + 14\frac{1}{4} = 100;$$

$$2x^2 = 100 - 14\frac{1}{4} = \frac{343}{4};$$

$$x^2 = \frac{343}{8}; \quad x = \frac{7}{2}$$

۱۵۴. هیچ رمزی در کار وجود ندارد. به رابطه زیر توجه کنید:

$$[(x+25+125-37-x)5]:2 = 282\frac{1}{2}$$

*

معاصر لرمونتوف می نویسد: گفت و گو در قلعه پیش آمد. هر جاکه شاعر می رفت، از او می خواستند تا يك معمای عددی طرح کند. شاعر، که از این مزاحمت ها خسته بود، راز معما را برای همه گفت و روشن کرد که ضمن عمل ها، خود عدد را از مجموع خارج می کنم و، بنابراین، پیش بینی عددی که به دست می آید، مشکل نیست، مثلاً

$$[(x+100+206+310-500-x):2]^3 = 174$$

مساله را، از کتاب ای. یا. دیمان به نام «داستان هایی از ریاضیات» (چاپ ۱۹۵۴) برداشته ایم.

۱۵۵. راه حل به نه دیکتوف: «مساله، به کمی فکر نیاز دارد. دخترها، به بازار رفتند، با هم مشورت کردند، ضمناً دومی و سومی، به توصیه های خواهر بزرگتر خود عمل کردند. دختر بزرگتر، کمی فکر کرد و گفت:

— خواهران من، ما تخم مرغ های خود را، مثل سابق، ده تا ده تا نمی فروشیم، بلکه آن ها را هفت تا هفت تا خواهیم فروخت، ضمناً، برای هر هفت تخم مرغ هم قیمت ثابتی معلوم می کنیم و هر سه نفر به همان قیمت عرضه می کنیم تا سفارش مادر را رعایت کرده باشیم. از این قیمت، حتی يك كوپك هم پایین نخواهیم آمد. هر هفت تخم مرغ يك آلتین (۳ كوپك)، موافقید؟ دومی با تعجب گفت:

— این خیلی ارزان است.

ولی خواهر بزرگتر مخالفت کرد:

— نگران نباشید، بعد از فروش تخم مرغ هایی که به گروه های هفت تایی

تقسیم کرده‌ایم، بقیه تخم مرغ‌ها را گران‌تر خواهیم فروخت. من از قبل تحقیق کرده‌ام که، به جز ما، کس دیگری در بازار تخم مرغ عرضه نمی‌کند تا قیمت را بشکند؛ وقتی که تقاضا وجود داشته باشد و کالا هم منحصراً باشد، قیمت بالا می‌رود، ما هم با فروش بقیه تخم مرغ‌ها، کمبود خود را جبران می‌کنیم.

دختر کوچک پرسید:

- بقیه را به چه قیمتی باید بفروشیم؟

- هر تخم مرغ به ۳ آلتین. همین، حرف دیگری ندارم. حالا، با همه آن

چه باید بدانیم آشنا شده‌ایم.

دختر دوم دوباره یادآوری کرد:

- خیلی گران است.

دختر بزرگتر با اوهم صدا شد:

- درست است، ولی در عوض، تخم مرغ‌های هفت تایی خود را ارزان

فروخته‌ایم، این به جای آن.

همه موافقت کردند.

به بازار رسیدند. هر يك از آن‌ها، در جای خود نشست و هر کدام، برای خود، آغاز به فروش کردند. خریداران به طرف دختر کوچکتر که ۵۰ تخم مرغ داشت، به علت ارزانی آن‌ها، هجوم بردند و هفت گروه ۷ تایی تخم مرغ، روی هم به ۷ آلتین، از او خریدند و يك تخم مرغ در سبد او باقی ماند. دومی هم که سی تخم مرغ داشت، به چهار خریدار و هر خریدار ۷ تخم مرغ فروخت و ۴ آلتین دریافت کرد. در سبد او ۲ تخم مرغ باقی ماند. دختر بزرگتر هم هفت تخم مرغ خود را به يك آلتین فروخت و ۳ تخم مرغ در سبد او باقی ماند. ناگهان سروکله آشپز خان در بازار پیدا شد که برای آشپزی خود به تخم مرغ احتیاج داشت. پسر خان به دیدن پدرش می‌آمد و کوکوی تخم مرغ دوست داشت. آشپز تمام بازار را جست و جو کرد، فقط ۶ تخم مرغ باقی مانده بود که آن هم نزد سه نفر بود: یکی از آن‌ها ۱ تخم مرغ داشت، دیگری ۲ تخم مرغ و سومی ۳ تخم مرغ. آشپز به طرف آن‌ها رفت.

روشن است که آشپز، ابتدا به طرف دختر بزرگتر رفت که ۳ تخم مرغ

داشت و بقیه تخم مرغ های خود را به يك آلتین فروخته بود. آشپز پرسید:

- بابت ۳ تخم مرغ خود چند می خواهی؟

- هر تخم مرغ ۳ آلتین.

آشپز، با ناراحتی گفت:

- چقدر؟ مگر عقل از سرت پریده است؟

ولی دختر پاسخ داد:

- هر طور میل شماست، ارزان تر نمی دهم. این قیمت آخر است.

آشپز به طرف دختری رفت که ۲ تخم مرغ در سبد داشت:

- چند؟

- هر عدد ۳ آلتین. همین ۲ تا مانده، بقیه را فروخته ام.

آشپز از دختر کوچک پرسید:

- تو تخم مرغ خود را چند می دهی؟

- ۳ آلتین.

چاره ای نبود. آشپز با قیمت باور نکردنی موافقت کرد:

- همه تخم مرغ های خود را بدهید.

آشپز بابت ۳ تخم مرغ دختر بزرگتر ۹ آلتین پرداخت که بایک آلتین

فروش قبلی او، روی هم ۱۰ آلتین شد. به دختر دوم، بابت ۲ تخم مرغ

باقی مانده ۶ آلتین داد که با ۴ آلتین قبلی، روی هم صاحب ۱۰ آلتین شد.

دختر کوچکتر هم ۳ آلتین بابت يك تخم مرغ خود گرفت و روی ۷ آلتین قبلی

گذاشت، باز هم روی هم ۱۰ آلتین.

دخترها به خانه برگشتند، هر کدام ۱۰ آلتین به مادر دادند و حکایت

کردند که، به چه ترتیب، توانسته اند سفارش مادر را انجام دهند».

*

و. گ. به نه دیکتوف (۱۸۰۷ - ۱۸۷۳)، شاعر روسی است. او

شعرهای غنائی می سرود که در سال های ۳۰ سده نوزدهم، شهرت بسیاری

یافت و بعد، یکباره، فراموش شد. ظاهراً، علت این امر را باید در پیچیدگی

زبان و شور و هیجان مصنوعی او دانست. در حکومت شوروی، شعرهای

این شاعر، بارها چاپ شده است.

به نه دیکتوف، به ریاضیات، بی اندازه علاقه مند بود. بعد از مرگ او، رساله دست نویسی از او پیدا کردند که به سرگرمی های حساب مربوط می شد (۱۸۶۵) که ما هم، این مساله را، از آن جا برداشته ایم. مساله به نه دیکتوف را، اولین بار، یا. ای. پرلمان چاپ کرد.

۱۵۷. بنابه گواهی پرفسور آ. و. زینگر، تولستوی مساله را به این ترتیب، حل کرده است: «از آن جا که ابتدا تمام گروه در نصف روز و بعد نصف گروه در نصف روز کار در و کردن زمین بزرگتر را تمام کرده اند، روشن است که نصف گروه در نصف روز $\frac{1}{3}$ از زمین بزرگتر را درو می کند. بنابراین، بعد از کار نصف گروه در زمین کوچکتر، از آن، به اندازه $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ ، یعنی $\frac{1}{6}$ زمین بزرگتر، باقی می ماند. اگر یک دروگر می تواند $\frac{1}{6}$ زمین بزرگتر را در یک روز درو کند، بنابراین، برای درو کردن $\frac{2}{3} + \frac{6}{6}$ ، یعنی $\frac{8}{6}$ زمین بزرگتر، ۸ دروگر لازم است. تعداد دروگرها، ۸ نفر بوده اند».

$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

شکل ۴۸

زینگر به یاد می آورد که: «تولستوی، در تمام زندگی خود، به مساله های معمائی - و نه خیلی حيله گرانه - علاقه مند بود و این مساله را در سال های جوانی خود، از پدر من یاد گرفته بود. وقتی که درباره این مساله با تولستوی صحبت می کردم، او دیگر

پیر شده بود، ولی با خوشحالی می گفت، اگر برای حل مساله، از یک شکل کاملاً مقدماتی (شکل ۴۸) استفاده کنیم، مساله بی اندازه ساده و روشن می شود».

را محل جبری مساله را می دهیم. تعداد دروگران گروه را x می گیریم و فرض می کنیم هر دروگر بتواند در هر روز y واحد مساحت از زمین را درو

کند (یادآوری می کنیم که، y يك مجهول کمکی است و تنها برای ساده تر شدن حل مساله وارد شده است. همان طور که خواهید دید، این مجهول کمکی، ضمن عمل حذف می شود). اکنون، مساحت هریک از دو زمین را بر حسب x و y بیان می کنیم. مساحت زمین بزرگتر، برابر است با

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

و مساحت زمین کوچکتر

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

طبق فرض مساله، مساحت زمین بزرگتر، دو برابر مساحت زمین کوچکتر است، بنابراین

$$\frac{3xy}{4} \cdot \frac{xy + 4y}{4} = 2$$

و یا

$$\frac{3xy}{xy + 4y} = 2$$

که بعد از ساده کردن، به این صورت در می آید:

$$\frac{3x}{x + 4} = 2$$

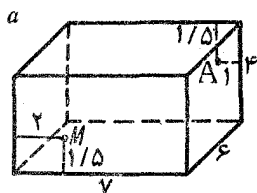
و از آن جا: $x = 8$.

۱۵۸. این مساله را از خاطرات روزانه و. بولگا کووا (ل. ن. تولستوی در سال های آخر زندگی) - که منشی تولستوی بود - برداشته ایم. او می نویسد: «امروز، خیلی به مساله «عنكبوت و مگس» علاقه مندمی شود ... باید گفت که این مساله، نه بلافاصله حل می شود و نه ساده».

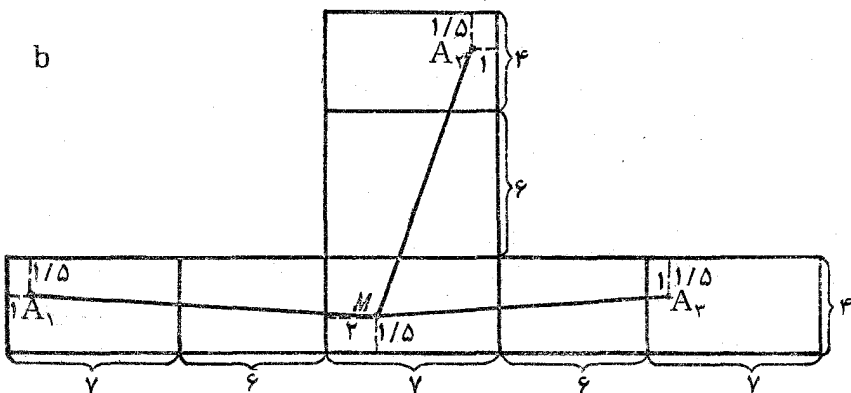
*

طول اطاق را ۷، عرض آن را ۶ و ارتفاع آن را ۴ آرشین می گیریم. فرض می کنیم، مگس روی دیوار بزرگتر و در فاصله دو آرشین از گوشه، و عنكبوت، روی دیوار مقابل و به فاصله يك آرشین از نزدیک ترین گوشه ایستاده باشند (شکل ۴۹ - a). مساله را به صورت رسم، بهتر می توان حل کرد. گسترده شده اطاق را در نظر می گیریم (شکل ۴۹ - b) و نقطه محل

عنكبوت را با پاره‌خط راستی به نقطه محل مگس وصل می‌کنیم. روشن است که، برحسب این که اطاق را چگونه بگسترانیم، سه جواب به‌دست می‌آید. در واقع، عنكبوت می‌تواند یا فقط از طریق دیوار، یا از طریق دیوار و سقف



b



شکل ۴۹

و یا از طریق دیوار و کف، خود را به مگس برساند. چون فاصله کف تا مگس برابر است با فاصله عنكبوت تا سقف، بنابراین، مسیرهای از طریق سقف و کف اطاق، هم‌ارزند.

با استفاده از گسترده شکل و قضیه فیثاغورث، به‌دست می‌آید:

$$MA_1 = \sqrt{197} \approx 14/04$$

$$MA_2 = \sqrt{116} \approx 10/77$$

$$MA_3 = \sqrt{145} \approx 12/04$$

بنابراین، از سه جواب ممکن، کوتاه‌ترین مسیر، فاصله ۱۰/۷۷ آرشینی است، که جواب مسأله است.

۱۵۹. راه حل تولستوی: «سه برادر بزرگتر، به اندازه ۸۰۰ × ۳، یعنی ۲۴۰۰ روبل به‌دو برادر کوچکتر داده‌اند. بنابراین، سهم هریک از دو برادر کوچکتر، و در نتیجه سهم هریک از ۵ برادر، برابر ۱۲۰۰ روبل است.

به این ترتیب، ارزش هر خانه ۲۰۰۰ روبل و تمام ارثیه ۶۰۰۰ روبل بوده است.

۱۶۰. راهنمایی تولستوی: «تا لحظه ای که ارباب از تولا به راه می افتد، دهقان چقدر راه رفته است؟ وقتی که ارباب به راه افتاد، در هر ساعت چقدر به دهقان نزدیک می شود؟ بعد از چند ساعت به دهقان می رسد؟ وقتی که دانستید بعد از چند ساعت به هم رسیده اند، آن وقت حساب کنید، در این مدت، ارباب چند ورست از تولا دور شده است» (ورست = 110668 کیلومتر).

۱۶۱. راه حل تولستوی: دهقان بابت اجاره زمین 8×70 ، یعنی ۵۶۰ روبل داد. برای ۷۰ دسیاتین 9×70 ، یعنی ۶۳۰ پوت بذرمصرف کرد. بذرا هر پوت ۱ روبل و ۳۰ کوپک خرید و برای ۶۳۰ پوت

$$(روبل) \quad 630 \times 1/30 = 21$$

تا این جا، دهقان ۱۳۷۹ روبل پرداخته است.

دهقان در هر دسیاتین، ۱۳ خرمن گندم دارد، ۷۰ دسیاتین 13×70 ، یعنی ۹۱۰ خرمن. از هر خرمن ۶ پوت گندم و از ۹۱۰ خرمن 6×910 ، یعنی ۵۴۶۰ پوت گندم به دست آورده است. گندم را هر پوت ۱ روبل و ۴۰ کوپک فروخته است، پس روی هم $40/1 \times 5460$ ، یعنی ۷۶۴۴ روبل گرفته است.

برای خرمن کوبی، هر پوت ۷ کوپک داده است و برای ۵۴۶۰ پوت 7×5460 ، یعنی ۳۸۲۲۰ روبل.

برای حمل گندم ها به شهر، برای هر پوت ۱۱ کوپک داده است، پس برای ۵۴۶۰ پوت

$$5460 \times 11 = 60060$$

بنابراین، باز هم روی هم $20/982$ روبل پرداخته است. کل پرداخت او ۲۳۶۱۸۰ روبل می شود

$$7644/00 \quad \text{دریافتی:}$$

$$2361/80 \quad \text{پرداختی:}$$

$$5232/20 \quad \text{مانده:}$$

(هر دسیاتین = 10925 هکتار؛ پوت $\approx 16/38$ کیلوگرم).

۱۶۲. راه حل تولستوی: «صفحه شطرنج ۸ در ۸ است، یعنی ۶۴ خانه دارد. (بعد تولستوی در جدول کاملی، تعداد گندم‌های هر خانه صفحه شطرنج را داده است). در خانه شصت و چهارم، این تعداد گندم وجود دارد:

$$۹۹۲۳۳۷۲۰۳۶۸۵۴۷۷۵۸۰۸$$

اگر هر ۴۰۰۰۰ دانه گندم را یک پوت بگیریم، تنها در خانه آخر جدول

$$۲۳۰۵۸۴۳۰۰۰۹۲۱۳۶۹$$

پوت گندم قرار دارد».

۱۶۳. راه حل تولستوی: «اگر هردو لوله را باز کرده باشیم، بعد از یک دقیقه چه پیش می‌آید؟ چقدر آب وارد بشکه می‌شود؟

یکی از لوله‌ها (آن که در ۱۵ دقیقه بشکه را پر می‌کند) در یک دقیقه

$\frac{1}{15}$ و لوله دیگر در یک دقیقه $\frac{1}{24}$ بشکه را پر می‌کند. از راه شیر پایین بشکه

هم، هر دقیقه $\frac{1}{120}$ بشکه خالی می‌شود:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{24} = \frac{8+5}{120} = \frac{13}{120}$$

$$\frac{13}{120} - \frac{1}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

یعنی بعد از یک دقیقه $\frac{1}{10}$ بشکه آب دارد. بعد از چند دقیقه پر می‌شود:

$$1 : \frac{1}{10} = 10$$

بشکه در ۱۰ دقیقه پر می‌شود».

۱۶۴. این یکی از دوازده مساله‌ای است که به ایوان پتروف، برای پیدا کردن جواب، پیشنهاد کردند، ایوان پتروف خواندن و نوشتن نمی‌دانست، ولی می‌توانست در ذهن خود محاسبه کند. او پسری دهقان بود. آزمایشی که از او به عمل آمد در ماه مه سال ۱۸۳۴ بود. پتروف به همه پرسش‌ها پاسخ درست داد و برای حل آن‌ها کمتر از یک ساعت وقت صرف کرد. به پسرک بی‌سواد، این مساله‌ها داده شده بود:

- (۱) عددهای ۱۴۳، ۲۷، ۳۸ و ۲۹ را جمع کنید.
 - (۲) عددهای ۴۲۷، ۲۸، ۷، ۲۰ و ۶۵۲ را جمع کنید.
 - (۳) بعد از ۱۵ سال، سن من برابر با سن کنونی برادرم می‌شود. اگر من ۱۴ ساله باشم، برادرم چندسال دارد؟
 - (۴) تاجری کلایی را به ۴۵۴۸ روبل فروخت. ۴۵۲ روبل برای او باقی‌ماند. کالا را چند خریده بود؟
 - (۵) از ۱۶۰۰ عدد ۱۲۴۸ را کم کنید.
 - (۶) عدد ۳۰۰۵۵ را از عدد ۴۰۰۰۴ کم کنید.
 - (۷) عددی را پیدا کنید که اگر ۳۴۵۶ را به آن اضافه کنیم، عدد ۱۰۰۰۰ به دست آید.
 - (۸) از عدد ۱۲۴۲۵، چندبار عدد ۲۵ به دست می‌آید؟
 - (۹) کیسه که در هر کدام ۸۷۵ عدد پنج‌کوپکی بود، دادیم و کرباس خریدیم. اگر کرباس هر آرشین ۳۵ کوپک ارزش داشته باشد، چند آرشین کرباس خریده‌ایم.
 - (۱۰) بین دو آبادی ۱۶۵۸ درخت به فاصله‌های برابر کاشته‌ایم. فاصله بین دو آبادی را پیدا کنید، به شرطی که فاصله هر دو درخت متوالی ۸ آرشین باشد.
 - (۱۱) در يك فاصله زمانی مشخص، ۱۲ نفر ۱۳۶ روبل خرج کردند. ۶۹ نفر در همین مدت، چقدر خرج می‌کنند؟
 - (۱۲) همان مسأله‌ای که در این جا آورده‌ایم. ایران‌پتروف هرشش جواب این مسأله را پیدا کرد. (چگونه؟ سعی کنید خودتان، جواب‌ها را جست و جو کنید.)
- ولی، داستان جوان حسابگر، به این جا تمام نمی‌شود. او در اوت ۱۸۳۴ دوبار مورد آزمایش قرار گرفت و این بار هم، به صورتی درخشان، از عهده آزمایش برآمد. یکی از مسأله‌هایی که، این بار، به او داده بودند، چنین بود: در يك سال چندثانیه وجود دارد؟ پسرک پاسخ را در ۳ دقیقه پیدا کرد. او گفت که در هر سال ۳۳۶۶۰۰۰۰ ثانیه وجود دارد. به او گفته شد که جواب درست نیست. آن وقت خواهش کرد به او اجازه بدهند که

محاسبه را به ردیف انجام دهد. بعد دیکته کرد که هر سال از ۸۷۶۰ ساعت یا ۵۲۵۶۰۰ دقیقه یا ۳۱۵۳۶۰۰۰ ثانیه تشکیل شده است، به شرطی که سال را ۳۶۵ شبانه روز، شبانه روز را ۲۴ ساعت، ساعت را ۶۰ دقیقه و دقیقه را ۶۰ ثانیه بگیریم.

*

پاسخ. ۱. $(۳ \times ۲۶)؛ (۲ \times ۳ \times ۲۱ + ۵ \times ۳)؛ (۳ \times ۱۶ + ۵ \times ۶)؛$
 ۲. $(۳ \times ۱۱ + ۵ \times ۹)؛ (۵ \times ۱۲ + ۳ \times ۶)؛ (۶ \times ۱۵ + ۳ \times ۱)؛$
 ۱۶۵. صورت این مسأله («مسأله راجینسکی»)، موضوع تابلو نقاشی
 ن. پ. بوگدانف به نام «محاسبه شفاهی» را تشکیل می دهد. تابلو، تخته سیاه
 را نشان می دهد که این عبارت کسری روی آن نوشته شده است؛ خود
 راجینسکی و شاگردان هم در آن نقاشی شده اند.

*

حل شفاهی مسأله، براساس رابطه زیر است:

$$۱۰۲ + ۱۱۲ + ۱۲۲ = ۱۳۲ + ۱۴۲$$

و چون

$$۱۰۲ + ۱۱۲ + ۱۲۲ = ۱۰۰ + ۱۲۱ + ۱۴۴ = ۳۶۵$$

بنابراین

$$\frac{۱۰۲ + ۱۱۲ + ۱۲۲ + ۱۳۲ + ۱۴۲}{۳۶۵} = \frac{۲ \times ۳۶۵}{۳۶۵} = ۲$$

*

جالب این است که س. آ. راجینسکی (۱۸۳۶-۱۹۰۲)، زمانی در
 دانشگاه، به عنوان استاد دانش های طبیعی کار می کرد. ولی بعد، کرسی
 دانشگاه را ترك كرد و به کار معلمی در مدرسه کشاورزی پرداخت. او
 بیش از هر چیز به مسأله های نامتعارف و محاسبه های شفاهی علاقه مند بود.

۱۶۶. راجینسکی، در «یادداشت های مربوط به مدرسه های کشاورزی»
 خود، می نویسد: «وقتی از دانش آموزان پرسیدم ۸۴×۸۴ چقدر می شود،
 یکی از پسران بلافاصله گفت: ۷۰۵۶. من از او پرسیدم:

- چطور حساب کردی؟

— حاصل برابر با مربع يك عدد كوچكترى است (او مى خواست بگويد كه، اين عدد، برابر است با حاصل ضرب دو مجذور كوچكتر)؛ من ۱۴۴×۵۰ را حساب و ۱۴۴ را از آن كم كردم. در واقع

$$۵۰ \times ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۷۲۰۰ - ۱۴۴ = ۷۰۵۶$$

او بلافاصله اين طور فكر كرده بود:

$$\begin{aligned} ۸۴ \times ۸۴ &= ۷ \times ۱۲ \times ۷ \times ۱۲ = ۷^۲ \times ۱۲^۲ = ۴۹ \times ۱۴۴ = \\ &= ۵۰ \times ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۷۰۵۶ \end{aligned}$$

ساده تر و بهتر از اين، نمى شد فكر كرد.

۱۶۷. فرض كنيد، بدهكار در پايان ماه اول، بايد x روبل بپردازد.

آن وقت

$$\left(1 + 1\frac{1}{۲} + ۲ + ۲\frac{1}{۲} + ۳ + ۳\frac{1}{۲} + ۴ + ۴\frac{1}{۲}\right)x = ۷۵۳ + ۳۰۳;$$

$$۲۲x = ۱۰۵۶; x = \frac{۱۰۵۶}{۲۲} = ۴۸ \text{ (روبل)}$$

مبلغ پرداختى ماههاى بعد را خودتان محاسبه كنيد.

*

آ. ن. سترانوويو بسكى (۱۸۳۹-۱۹۰۳)، مربي و رياضى دان مشهور روس و مؤلف كتاب «دوره جبر، براساس تعميم تدريجى مسأله هاى حساب» (۱۸۶۸). او در كتاب خود، مبحث هاى جبر را طوري تنظيم كرده است كه، بتوان به سادگى، آن ها را به عنوان تعميمى از حساب ياد گرفت. او در دوراني، معلم خانگى سوفيا كوا الوسكى بوده است.

۱۶۸. فرض مى كنيم، كار در x هفته انجام شده است. در اين صورت،

داريم:

$$(۱۵ - ۱۰)x = ۴\frac{1}{۲} + ۳\frac{1}{۲} + ۷;$$

$$x = \frac{۴\frac{1}{۲} + ۳\frac{1}{۲} + ۷}{۱۵ - ۱۰} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \text{ (هفته)}$$

۱۶۹. اگر سرمايه پدر را x بگيريم، بايد داشته باشيم:

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)x = 2500 + 3000;$$

$$x = \frac{2500 + 3000}{1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = \frac{5500}{\frac{4}{15}} = \frac{5500 \times 15}{4} = \frac{5500 \times 15}{4} = 20625 \text{ (روبل)}$$

۱۷۰. سن پسر دوم را x می گیریم، آن وقت

$$(x + 3x) = 45 - 29;$$

$$(1 + 3)x = 45 - 29;$$

$$x = \frac{45 - 29}{1 + 3} = 4$$

۱۷۱. مؤلف مسأله، برای حل، راهنمایی می کند

$$\frac{150}{5}x + (50 - x)\frac{140}{7} = 50(30 - 3)$$

از آن، x ، یعنی تعداد سطل های سرکه نوع اول به دست می آید.

$$x = \frac{50(30 - 3) - \frac{50 \times 140}{7}}{\frac{150}{5} - \frac{140}{7}}$$

۱۷۲. اگر x فونت از نقره نوع اول انتخاب کرده باشیم؛ باید

داشته باشیم:

$$\frac{288}{3}x + \frac{328}{4}(20 - x) = 20(93 - 3)$$

و از آن جا

$$x = \frac{20(93 - 3) - \frac{328 \times 20}{4}}{\frac{288}{3} - \frac{328}{4}}$$

۸. مسأله‌های اروپای غربی

۱۷۳. بنابر شرط‌های مسأله داریم:

$$\begin{cases} x + 7 = 5(y - 7) \\ y + 5 = 7(x - 5) \end{cases}$$

با حل این دستگاه به دست می‌آید:

$$x = 7\frac{2}{17}; \quad y = 9\frac{14}{17}$$

*

این مسأله، از کتاب ریاضی دان ایتالیائی، فیبوناچی، که اورا الئوناردوی پیزائی هم می‌گویند، برداشته شده است. او در حدود سال ۱۱۷۵ میلادی در پیزا متولد شد (و به همین دلیل، اورا پیزائی می‌گویند). «کتاب حساب» او به نام «لیبر آباکوس» معروف است. آموزش ریاضی خود را در الجزایر دید. ضمن مسافرت به شرق، با ریاضی دانان آن جا آشنا شد و موفقیت‌های آن‌ها را در نوشته‌های خود منعکس کرد و از همین راه بود که پیشرفت‌های ریاضی شرق، در دسترس غرب قرار گرفت. «کتاب حساب»، مهم‌ترین تألیف این دانشمند است.

او در مقدمه کتابش می‌نویسد: «پدرم اهل پیزا بود و در اداره گمرک بوکیا در افریقا کار می‌کرد. او مرا با خود به آن جا برد تا هنر حساب کردن را یاد بگیرم. هنر عجیب حساب کردن، تنها به کمک نه علامت هندی، مرا چنان به شوق آورد که، به طور قطع، تصمیم گرفتم، آن چه را در مصر، یونان،

سوریه، سیسیل و پرووانس در این باره می دانستند، بیاموزم. از همه این کشورها دیدن کردم و قانع شدم که، دستگاه عددنویسی هندی از همه کامل تر است و بر روش فیثاغورث برتری دارد. این دستگاه را، و همه آنچه به آن مربوط می شد، یاد گرفتم، و بررسی های شخصی خودم را که از «مقدمات» اقلیدس به دست آورده بودم، به آن اضافه کردم و تصمیم گرفتم این کتاب را بنویسم».

«کتاب حساب» رساله ای است در باره حساب و جبر که شامل ۱۵ فصل است و آگاهی هایی از دانش حساب و جبر آن زمان را، در اختیار خواننده می گذارد.

لئوناردوی پیزائی، با طرح وحل مسأله ای درباره سرمایه چند نفر، برای نخستین بار، اندیشه عدد منفی را، به نام «قرض»، در اروپا طرح کرد. خدمت بزرگ لئوناردوی پیزائی به دانش، در این بود که، برای نخستین بار، دانشمندان اروپایی را با جبر و دستگاه عددنویسی هندی آشنا کرد. ۱۷۴. تعداد گنجشک ها را x ، قمری ها را y و کبوترها را z می گیریم. این دستگاه به دست می آید:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+2z=30 \end{cases}$$

اگر z را بین این دو معادله حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$10x+9y=180$$

یا

$$y=20-\frac{10}{9}x$$

و با فرض $x=9$ ، به دست می آید: $y=10$ ، $z=11$.

۱۷۵. رگیومونتان، این مسأله را با دو روش حل کرده است. روش اول: معادله را به این صورت می نویسیم:

$$10x=x^2+\frac{100}{27}$$

$$x = 5 - \sqrt{21 \frac{8}{27}}$$

روش دوم: $\frac{x}{10-x} = y$ می گیریم. به دست می آید:

$$y + \frac{1}{y} = 25$$

و از آن جا

$$y = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$$

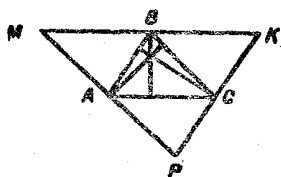
که از آن، بدون هیچ زحمتی، مقدار x به دست می آید.
باید یادآوری کرد که، رگیومونتان، در هر درمورد، رادیکال را با علامت منفی انتخاب می کند.

*

رگیومونتان (۱۴۳۶-۱۴۷۶)، ریاضی دان مشهور آلمانی (نام و شهرت واقعی او، یوهان مولر است).

شهرت رگیومونتان، به خاطر کارهای او در زمینه مثلثات و ترجمه رساله های کلاسیک دانشمندان یونان باستان است. مشهورترین اثر او، رساله «درباره همه نوع مثلث ها» است که بعد از مرگ او، در سال ۱۵۳۳، چاپ شد. در این رساله، رگیومونتان، برای نخستین بار در اروپا، مثلثات را به عنوان یک دانش مستقل و جدا از اخترشناسی، مورد مطالعه قرار داده است.

۱۷۶. ABC را مثلث مفروض می گیریم (شکل ۵۰). از هر رأس بر ضلع روبه روی آن، عمودی رسم می کنیم و، سپس، مثلث MKP را طوری رسم می کنیم که نقطه های A، B و C، وسط ضلع های آن باشند [برای این منظور، کافی است، از رأس های A، B و C، خط های راستی به موازات ضلع های روبه رو بکشیم]. ارتفاع های مثلث ABC، به صورت عمود منصف های ضلع های مثلث MKP در می آیند. می دانیم که، عمود منصف های هر مثلث،



شکل ۵۰

از يك نقطه می گذرند (چرا؟)
بنابراین، ارتفاع های مثلث مفروض هم،
از يك نقطه می گذرند.

۱۷۷. حل این مسأله ساده

است؛ آن را خودتان حل کنید.

*

این مسأله را از رساله «در باره تبدیل ها» تألیف لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ - ۱۵۱۹) انتخاب کرده ایم. در این رساله، در باره موضوع های مربوط به تبدیل یک جسم - بدون کم یا زیاد کردن مقدار ماده آن - بحث شده است.

به اعتقاد این دانشمند، «هیچ زمینه ای وجود ندارد که، در آن جا، نشود از یکی از شاخه های ریاضی استفاده کرد». او عمیقاً باور داشت که هر بحثی را، تنها ریاضی دان می تواند خاتمه دهد، زیرا تنها اوست که «قادر است مهر سکوت بر لب پر خاشاکر بزند».

۱۷۸. پول اولی را x ، دومی را y و سومی را z می گیریم.

مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y+z) = 12 \\ y + \frac{1}{3}(x+z) = 12 \\ z + \frac{1}{4}(x+y) = 12 \end{cases}$$

و از آن جا

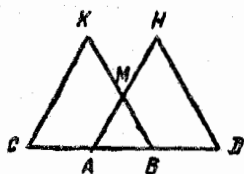
$$x = 3\frac{9}{17}, \quad y = 7\frac{13}{17}, \quad z = 9\frac{3}{17}$$

*

آدام ریز (۱۴۹۲ - ۱۵۵۹)، ریاضی دان آلمانی و مؤلف رساله معروفی درباره جبر به نام «Die Coss» (۱۵۲۴).

۱۷۹. به مرکز نقطه A و به شعاع مفروض پرگار ثابت، کمائی رسم

می کنیم تا نقطه D به دست آید (شکل ۵۱). سپس، به مرکز نقطه B و با



شکل ۵۱

همین شعاع، روی خط راست AB،

نقطه C را پیدا می کنیم. بعد روی

پاره خط CB، مثلث متساوی الاضلاع

CKB و روی پاره خط AD، مثلث

متساوی الاضلاع ADH را رسم

می کنیم. نقطه برخورد ضلع های BK و AH را M می نامیم. مثلث

AMB مثلث مورد نظر است.

*

این مسأله را، برای نخستین بار، نیکلاتارتاگلیا (حدود ۱۴۹۹-۱۵۵۷)

ریاضی دان برجسته ایتالیائی طرح کرد. تارتاگلیا، ریاضیات را پیش خود

آموخت. او زبان های یونانی و لاتینی را هم، پیش خود یاد گرفت. در زمینه

ریاضیات، روش حل معادله درجه سوم به صورت

$$x^3 + px = q$$

را کشف کرد (p و q، عددهایی ثابت اند).

۱۸۰. کاردان، این مسأله را

با روش هندسی حل کرده است. در

این جا، راه حل او را، با علامت-

گذاری های امروزی می آوریم. با

استفاده از شکل (شکل ۵۲ را ببینید)،

داریم:

$$x^2 + 2 \times 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

بنابراین داریم:

$$x^2 + 6x = 91$$

از این دو معادله، نتیجه می شود:

$$(x + 3)^2 = 91 + 9 = 100$$

از آن جا: $x + 3 = 10$ و بنا بر این $x = 7$.

*

جیرو لامو کاردان (۱۵۰۱-۱۵۷۶)، ریاضی دان معروف ایتالیائی، صاحب رساله ای علمی است به نام «هنر بزرگ، یا قانون های جبر»، که در سال ۱۵۴۵ چاپ شد. در این رساله، برای نخستین بار، راه حل معادله درجه سوم داده شده است، اگر چه فرمول مربوط به جواب معادله را از تارتا گلیا اقتباس کرده است. در همین رساله، راه حل معادله درجه چهارم هم چاپ شده است که، برای نخستین بار، ل. فرراری (۱۵۲۲-۱۵۶۵) آن را حل کرده بود.

کاردان، به جز ریاضیات، در زمینه پزشکی هم کار می کرد و فلسفه هم درس می داد. او در نوشته های فلسفی خود، معتقد است، تنها به دانش هایی باید تکیه کرد که بر اساس تجربه بنا نهاده شده باشند.

۱۸۱۰. اگر از علامت گذاری های امروزی استفاده کنیم، مسأله منجر به این معادله می شود:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

و از آن جا

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15}, \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

*

دور زمان کاردان، مسأله پیدا کردن دو عدد، که مجموعی برابر ۱۰ و حاصل ضربی برابر ۴۰ داشته باشند، مسأله ای بدون جواب به حساب می آمد؛ زیرا در آن زمان، هنوز مفهوم عددهای موهومی شناخته نشده بود و در باره عمل هایی که می توان روی عددهای موهومی انجام داد، اطلاعی نداشتند. خود کاردان هم، در این مسأله و مسأله های مشابه دیگر، با عددهای مختلط برخورد می کرد که نمی توانست آن ها را تفسیر کند و، به همین مناسبت، آن ها را، «عددهای غیرواقعی» و یا «عددهای موهومی» می دانست. او بی اندازه شگفت زده بود که این «عددهای غیرواقعی» دارای مجموع و حاصل ضربی هستند که با شرط های مسأله سازگار است.

یکی از کارهای کاردان این بود که به عددهای مختلط توجه کرد و، برای نخستین بار، برخی عمل‌ها را روی آن‌ها انجام داد. در واقع، کاسپر وسل (۱۷۴۵-۱۸۱۸) ریاضی‌دان دانمارکی بود که، برای نخستین بار، از سال ۱۷۹۹، در نشریه فرهنگستان علوم دانمارک، عددهای مختلط و عمل‌های مربوط به آن‌ها را، به‌طور اساسی، طرح کرد. نظریهٔ امروزی عددهای مختلط، در سدهٔ نوزدهم و، به‌خصوص، به وسیلهٔ گوس ریاضی‌دان آلمانی، پایه‌گذاری شد. تلاش ریاضی‌دانان سدهٔ نوزدهم، براساس نظریهٔ دقیق عددهای مختلط، موجب پیدایش نظریهٔ تابع‌های بامتغیر مختلط شد که کاربرد زیادی در دانش و صنعت پیدا کرد.

۱۸۲. حل را می‌توانید در هر کتاب درسی پیدا کنید. کاردان بود که، برای نخستین بار، حل این مسأله را داد.

۱۸۳. راه حل ویت، به این ترتیب است. با تبدیل $x = y + z$ ، معادلهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$y^2 + y(2z + p) + z^2 + pz + q = 0$$

z را طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب جملهٔ درجهٔ اول y ، برابر صفر شود:

$$2z + p = 0 \Rightarrow z = -\frac{p}{2}$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}$$

و معادلهٔ ما به این صورت درمی‌آید:

$$y^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

و یا

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

و در نتیجه

$$x = y + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

*

فرانسوا ویت (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، ریاضی‌دان فرانسوی، وکیل دادگستری و یکی از رجال مشهور دولتی بود. در جنگ اسپانیا علیه فرانسه [در آن زمان، دستگاه‌های تفتیش عقاید (انگیزسیون) بر اسپانیا حکومت می‌کرد]، ویت توانست استعداد فوق‌العاده خود را در کشف رمز ارزمرهای بغرنج مورد استفاده دشمن نشان دهد. اسپانیائی‌ها، به کمک رمز پیچیده‌ای، با مخالفان شاه فرانسه، حتی در داخل فرانسه، ارتباط برقرار می‌کردند و هیچ‌کس نتوانسته بود آن را کشف کند.

تلاش‌های بیهوده زیادی برای پیدا کردن کلید این رمز انجام گرفت و، سرانجام، هانری چهارم، برای حل این مشکل، به ویت مراجعه کرد. ویت، بعد از کاری پر شدت و خسته کننده، موفق شد کلید رمز را پیدا کند. او با این عمل میهن‌دوستانه خود، در واقع، جان خود را به خطر انداخت. دستگاه تفتیش عقاید اسپانیا، ویت را ملحد اعلام، و محکوم به سوختن در آتش کرد، ولی در اجرای حکم توفیق نیافت.

خدمت بزرگ ویت، به تکامل جبر علامتی مربوط می‌شود. بی‌جهت نیست که او را پدر علم جبر می‌خوانند. پیش از او، مجهول‌ها را با حرف نشان می‌دادند، ولی او، علاوه بر مجهول‌ها، ضریب‌های معادله را هم با حرف نشان داد، و چهره امروزی جبر را به آن داد. قضیه مربوط به پیدا کردن رابطه بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله (قضیه ویت)، روش واحد حل معادله‌های درجه دوم، سوم و چهارم و تبدیل‌های مختلف ریشه‌ها، از جمله کارهای ویت است. کارهای ویت، منحصر به جبر نمی‌شود و در زمینه هندسه و مثلثات هم، اثرهایی دارد. مثلاً در مثلثات، مسأله مربوط به تعیین همه جزءهای مثلث مسطحه و کروی را، با معلوم بودن سه جزء آن، حل کرد. ویت، روش‌های ریاضی خود را، در سال ۱۵۷۹، در کتاب «قانون‌های ریاضی» خود، منتشر کرد.

۱۸۴۰. فرض می‌کنیم، گلوله در زمان t ، مسیر قائم AD - سقوط آزاد - را طی کند، ضمناً، از مقاومت هوا صرف نظر می‌کنیم (شکل ۳). در این صورت داریم:

$$AD = \frac{1}{2}gt^2$$

که در آن، g ، شتاب سقوط آزاد است. در نتیجه

$$t = \sqrt{\frac{2AD}{g}}$$

t_1 را برابر زمانی می گیریم که برای حرکت گلوله در طول وتر AC لازم است (از مقاومت هوا و اصطکاک صرف نظر می کنیم)، باید داشته باشیم:

$$AC = \frac{1}{2}at_1^2$$

که در آن، a عبارت است از شتاب حرکت در طول خط مایل AC . از آنجا

$$t_1 = \sqrt{\frac{2AC}{a}}$$

از نقطه C ، عمود CE را بر AD فرود می آوریم (روی شکل ۳، با خط چین نشان داده شده است). از مکانیک می دانیم که باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{g} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow a = \frac{AE \cdot g}{AC}$$

بعد، داریم (شکل ۳ را ببینید):

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

و بنابراین

$$a = \frac{AC}{AD} \cdot g$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2AC}{a}} = \sqrt{\frac{2AD \cdot AD}{AC \cdot g}} = \sqrt{\frac{2AD}{g}} = t$$

یعنی، زمان حرکت در طول هر وتر، برابر است با زمان حرکت در طول قطر آن.

*

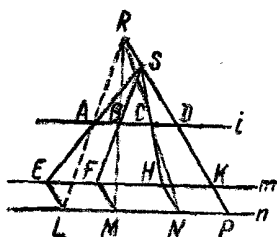
گالیله نو گالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲)، ریاضی دان، مکانیک دان، فیزیک دان و

اخترشناس ایتالیایی. او مخترع تلسکوپ است که تا ۳۲ بار بزرگ می کرد (قبل از او، بهترین دوربین هلندی، می توانست تا سه بار بزرگ کند). به کمک این تلسکوپ، صورت های زهره، لکه های خورشید و چرخش خورشید را کشف کرد، به مطالعه قمرهای مشتری پرداخت و زحل را مشاهده کرد. پایه اصلی شناخت طبیعت را مشاهده می دانست و معتقد بود که «درک احساسی»، چیزی جز بازتاب جهان خارج نیست. به مبارزه ای پر شور علیه کهنه پرستی و رخوت در دانش و، به خصوص، علیه خمود ارسطوئی برخاست.

کلیسای کاتولیک، به شدت گالیله را مورد تعقیب قرار داد. او را دوبار به محکمه «انگیزیون مقدس» فرا خواندند. بار اول، به خاطر انتشار کشف هایی که از طریق تلسکوپ کرده بود و، در آن ها، بردستی نظریات کوپرنیک در مورد گردش زمین به دور محور خورشید تاکید شده بود؛ بار دوم، گالیله را به خاطر چاپ کتاب بزرگ اوبه نام «بحثی درباره دو دستگاه بزرگ جهانی، یعنی دستگاه بطلمیوسی و دستگاه کوپرنیکی»، در سال ۱۶۳۳، به محکمه تفتیش عقاید جلب کردند. در این کتاب، دانشمند نابغه، ضمن مقایسه دستگاه زمین مرکزی (نظریه بطلمیوسی) و دستگاه خورشیدمرکزی (نظریه کوپرنیکی)، برتری دومی را بر اولی نشان می دهد. دستگاه انگیزیون موفق شد، با حيله و تقلب، گالیله را به انکار ساختگی دیدگاه های خود وادارد و «توبه نامه» شرم آوری را از زبان او جاری کند. گالیله هفتاد ساله، برای این که به سرنوشت «جیوردانو برونو» گرفتار نشود (برونو را در ۱۷ فوریه سال ۱۶۰۰ میلادی، در رم، در آتش سوختند)، ناچار شد پیراهن گناه و توبه به تن کند، روی زانوهای خود بایستد و در برابر «کتاب مقدس»، هواداری خود را از دستگاه کوپرنیک انکار کند، آن را دروغ بخواند و هواداری و استفاده از آن را ناسازگار با نوشته های مقدس، و باورهای مذهبی بداند. ولی مردم، صداقت گالیله را، در این انکار، باور نکردند و افسانه ای ساختند که، طبق آن، وقتی تشریفات توبه دانشمند به پایان رسید، گالیله زیر لب زمزمه می کرد: «با همه این ها، زمین به گردش خود ادامه می دهد».

هیچ چیز دیگری، بهتر از همین افسانه، علاقه مردم را نسبت به دانشمند بزرگ و خشم تند آن ها را، نسبت به تعقیب کننده گان او، نمی تواند نشان دهد.

کاملاً روشن است که گالیله، زیر فشار شدیدی که بر او تحمیل شده بود، ناچار شد نظر گاه‌های علمی خود را انکار کند. با وجود این، حتی بعد از «توبه» هم، مصون از تعقیب نبود. دستگاه تفتیش عقاید، به طور دایمی او را زیر نظر داشت و به گوشه نشینی همیشگی محکومش کرده بود و سرانجام، در زندان خود، ویلای محل زندگیش در نزدیکی فلورانس، به پایان زندگی خود رسید.



شکل ۵۳

۱۸۵. فرض می‌کنیم خط‌های

راست PS و NC، یکدیگر را در نقطه R قطع کنند (شکل ۵۳). در این صورت، داریم:

$$DC:PN = DR:PR$$

باتوجه به خط‌های راست SAE، SCH، SBF و SDK، به دست می‌آید:

$$DA:KE = DB:KF = DC:KH$$

و با در نظر گرفتن

$$EL \parallel FM \parallel HN \parallel KP$$

خواهیم داشت:

$$KE:PL = KF:PM = KH:PN$$

از آنجا

$$DA:PL = DB:PM = DC:PN = RD:KP$$

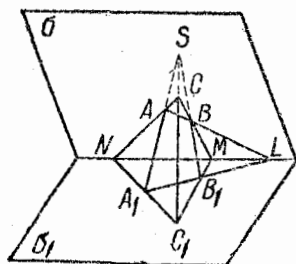
و به این ترتیب، خط‌های راست AL، BM، CN و SP از نقطه R می‌گذرند.

*

یوهان کپلر (۱۵۷۱ - ۱۶۳۰)، ریاضی‌دان و اخترشناس آلمانی، مولف رساله مشهور «هندسه فضائی جدید دربارهٔ بشک‌های شراب» (۱۶۱۵)، که در آن، مبانی آنالیزی نهایت کوچک‌ها را طرح ریخته است، دانشی که بعدها، در کارهای لایب‌نیس و نیوتون، به کمال خود رسید. او بود که بورگی را

به تنظیم جدول لگاریتمها ترغیب کرد و، همراه با او، «جدول هزار لگاریتم» را در سال ۱۶۲۴ چاپ کرد. در زمینه اخترشناسی، قانونهای حرکت سیارهها را کشف کرد و تمامی زندگی خود را وقف تکامل نظریه خورشید مرکزی کوپرنیک کرد. آموزش کپلر، با اعتقادهای کلیسا نمی ساخت و کاملاً طبیعی بود که کلیسا به مبارزه علیه او برخیزد و، به طور دائم، او را مورد تعقیب قرار دهد.

۱۸۶. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ روی دو صفحه متفاوت σ و σ_1 قرار گرفته اند (شکل ۵۴). علاوه بر آن، می دانیم خطهای راست AA_1 و BB_1 و CC_1 ، در نقطه S به هم رسیده اند. باید ثابت کنیم، خطهای راست AB و BC ، A_1B_1 و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 یکدیگر را قطع می کنند و نقطه های برخورد آن ها بر یک خط راست قرار دارد. دو ضلع متناظر AB و A_1B_1 را



شکل ۵۴

در نظر می گیریم، این دو ضلع، در نقطه ای مثل L یکدیگر را قطع می کنند، زیرا اولاً موازی نیستند (بنابر فرض)، ثانیاً روی یک صفحه - صفحه مثلث SA_1B_1 - قرار دارند. چون صفحه های σ و σ_1 متفاوتند و موازی هم نیستند، یکدیگر را روی

خطی مثل l قطع می کنند. روشن است که نقطه L روی خط l قرار دارد، زیرا AB و A_1B_1 ، به ترتیب، روی صفحه های σ و σ_1 واقع شده اند و تنها روی فصل مشترک این دو صفحه، می توانند به هم برسند.

به همین ترتیب ثابت می شود که ضلع های متناظر BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 ، به ترتیب، در نقطه های M و N یکدیگر را قطع می کنند و، ضمناً، این نقطه ها روی خط راست l - فصل مشترک دو صفحه - قرار دارند. بخش اول مساله، حل شد.

اکنون فرض می کنیم L ، M و N - نقطه های برخورد ضلع های متناظر AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 - روی خط راست l واقع باشند و ضمناً، خطهای راست AA_1 ، BB_1 و CC_1 با هم موازی نباشند.

ثابت می‌کنیم، با این شرط‌ها، خط‌های راست AA_1 ، BB_1 و CC_1 در نقطه‌ای مثل S به هم می‌رسند.

برای این منظور، خط‌های راست AA_1 و BB_1 را در نظر می‌گیریم. این دو خط راست در نقطه‌ای مثل S_1 به هم می‌رسند، زیرا بنابر شرط، موازی نیستند و، ضمناً، بزرگ صفحه - صفحه مثلث ALA_1 - قرار دارند. به همین ترتیب، ثابت می‌شود، خط‌های راست BB_1 و CC_1 ، AA_1 و CC_1 هم، به ترتیب، در نقطه‌هایی مثل S_2 و S_3 یکدیگر را قطع می‌کنند. حالا ثابت می‌کنیم، نقطه‌های S_1 ، S_2 و S_3 بر هم منطبق اند (روی شکل، این سه نقطه را، بزرگ نقطه S نشان داده‌ایم). اگر این سه نقطه بر هم منطبق نباشند، باید مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ بزرگ صفحه‌قرار گیرند (صفحه مثلث $S_1S_2S_3$)، که با فرض مساله ناسازگار است. مساله به طور کامل حل شد.

*

ژرار دزارک (۱۵۹۳ - ۱۶۶۲)، و بنابه قولی (۱۵۹۱ - ۱۶۶۱)، ریاضی‌دان و مهندس نظامی فرانسوی، که مبانی هندسه تصویری و هندسه ترسیمی را طرح ریخت.

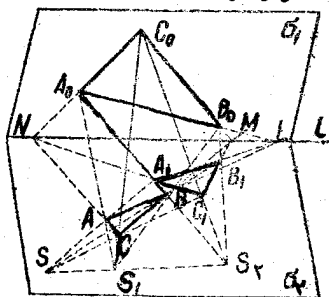
مساله‌ای را که در این جا آورده‌ایم، حالت خاصی است از مساله کلی‌تری که به نام قضیه دزارک مشهور است، و یکی از قضیه‌های اصلی هندسه تصویری به شمار می‌رود. قضیه کلی دزارک چنین است: «اگر در دو مثلث، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر، بزرگ خط راست قرار گیرند، آن وقت، خط‌های راستی که راس‌های متناظر دو مثلث را به هم وصل می‌کنند، از بزرگ نقطه می‌گذرند». عکس این حکم هم درست است.

در این تنظیم‌بندی، نقطه‌های S ، L ، M و N ، نقطه‌های ناویژه (improper) نامیده می‌شوند.

اندیشه‌های دزارک، تکامل بعدی خود را، در ابتدای سده نوزدهم و در کارهای مونژ و پونسله (ریاضی‌دانان فرانسوی) و شیتز (ریاضی‌دان آلمانی) و دیگران به دست آورده.

۱۸۷۰. فرض کنید مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ (شکل ۵۵)، روی صفحه σ ، واقع باشند و، ضمناً، فرض کنید خط‌های راستی که راس‌های متناظر

A و A_1 ، B و B_1 ، C و C_1 را به هم وصل می کنند، در نقطه S به هم رسیده باشند. نقطه های برخورد ضلع های AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 را، به ترتیب، M ، L و N می گیریم (طبق فرض، این خط های راست، روی يك صفحه قرار دارند و، ضمناً، با هم موازی نیستند). ثابت می کنیم، سه نقطه L ، M و N روی يك خط راست قرار دارند.



شکل ۵۵

از نقطه S ، خط راستی رسم می کنیم که در صفحه σ واقع باشد و روی آن، دو نقطه دلخواه S_1 و S_2 را در نظر می گیریم. نقطه S_1 را به نقطه های A ، B ، C و نقطه S_2 را به نقطه های A_1 ، B_1 ، C_1 وصل می کنیم. خط های راست S_1A و S_2A_1 یکدیگر

را قطع می کنند، زیرا روی يك صفحه قرار دارند (صفحه مثلث AS_1S_2) و موازی نیستند (حالت توازی مورد نظر ما نیست). نقطه برخورد آنها را A_0 می نامیم. به همین ترتیب، محل برخورد S_1B و S_2B_1 و S_1C و S_2C_1 را، به ترتیب، B_0 و C_0 می نامیم. مثلث $A_0B_0C_0$ به دست می آید که در صفحه ای مثل σ_1 قرار گرفته است. فصل مشترك دو صفحه σ و σ_1 را، l می نامیم.

مثلث $A_0B_0C_0$ ، با هر يك از مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ ، با شرط های قضیه دزارك در فضا سازگارند و، بنابراین، نقطه های L ، M و N - محل برخورد ضلع های متناظر مثلث ها - روی خط راست l قرار می گیرند. از طرف دیگر، نقطه های برخورد ضلع های متناظر مثلث های مفروض ABC و $A_1B_1C_1$ ، همین سه نقطه L ، M و N خواهد بود که، همان طور که گفتیم، روی يك خط راست - خط راست l - قرار دارند.

اکنون، عکس قضیه را ثابت می کنیم. فرض کنید، نقطه های برخورد ضلع های متناظر مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ ، روی خط راستی مثل l واقع باشند. ثابت می کنیم، خط راست ناموازی که، به ترتیب، راس های متناظر دو مثلث را به هم وصل می کنند، از نقطه ای مثل S می گذرند. برای این منظور،

صفحه دلخواه σ_1 را از خط I عبور می دهیم، به نحوی که غیر از صفحه σ باشد. از نقطه های L ، M و N ، سه خط راست دلخواه در صفحه σ_1 عبور می دهیم، به نحوی که از يك نقطه عبور نکنند و با هم موازی نباشند. در صفحه σ_1 ، مثلث $A_0B_0C_0$ به دست می آید، که در آن، عبارت است از نقطه برخورد خط های راستی که از L و N عبور کرده اند؛ به همین ترتیب، B_0 محل تلاقی خط های راستی است که از L و M عبور کرده اند و C_0 محل برخورد خط های راستی است که از نقطه های M و N گذشته اند.

مثلث $A_0B_0C_0$ ، نسبت به هر کدام از دو مثلث مفروض ABC و $A_1B_1C_1$ در شرط های عکس مسأله دزارك در حالت فضا صدق می کند و، بنابراین، خط های راست A_0A_1 ، B_0B_1 و C_0C_1 در نقطه ای مثل S_1 و خط های راست A_0A_1 ، B_0B_1 ، C_0C_1 در نقطه ای مثل S_2 - غیر از S_1 - به هم می رسند. خط راست S_1S_2 را در نظر می گیریم. محل برخورد این خط راست را با صفحه σ به S نشان می دهیم. اکنون، خط های راست AA_1 و S_1S_2 را مورد توجه قرار می دهیم. این دو خط راست متقاطع اند، زیرا در يك صفحه قرار دارند (صفحه مثلث $S_1A_0S_2$)، ولی این دو خط راست تنها در نقطه S می توانند یکدیگر را قطع کنند، یعنی خط راست AA_1 از نقطه S عبور می کند. به همین ترتیب، ثابت می شود که، خط های راست BB_1 و CC_1 هم از نقطه S می گذرند. از این جا نتیجه می گیریم، خط های راستی که رأس های متناظر دو مثلث مفروض را به هم وصل می کنند، از يك نقطه می گذرند.

یادداشت. تجزیه و تحلیل دقیق تر مسأله دزارك، منجر به نتیجه گیری کلی تر زیر می شود: «اگر خط های راستی که رأس های متناظر دو مثلث مفروض را به هم وصل می کنند، در يك نقطه به هم برسند یا با هم موازی باشند، یکی از سه حالت پیش می آید: ۱) سه نقطه برخورد ضلع های متناظر، در يك خط راست واقع اند؛ ۲) يك جفت از ضلع های متناظر، دو خط موازی را تشکیل می دهند که با خط راستی که از محل برخورد دو جفت ضلع های متناظر دیگر می گذرد، موازی اند؛ ۳) هر جفت ضلع های متناظر از دو خط راست متوازی تشکیل شده است. در این مورد باید اضافه کرد که حکم قضیه، در حالت عکس هم درست است.

به این نکته هم توجه کنیم که، مسأله دزارك در حالت مسطحه، به كمك يك شكل فضایی و از راه وارد کردن مثلث سوم $A_0B_0C_0$ حل شد. كه صفحه آن σ_1 ، بر صفحه σ یعنی صفحه مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ ، منطبق نیست. خیلی ها کوشیدند تا، این مسأله را، بدون وارد شدن به فضای سه بعدی، حل کنند، ولی همه تلاش ها با بن بست رو به رو می شد. سرانجام، هیلبرت (۱۸۶۲-۱۹۴۳)، ریاضی دان آلمانی، ثابت کرد که، حل این مسأله، بدون یاری گرفتن از فضای سه بعدی، ممکن نیست.

۱۸۸۰. معادله مفروض را، می توان چنین نوشت:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0$$

یا

$$x^3(x-4) - 19x(x-4) + 30(x-4) = 0$$

از آن جا: $x_1 = 4$.

بقیه ریشه ها را باید از معادله $x^2 - 19x + 30 = 0$ به دست آورد.

معادله اخیر را می توان چنین نوشت:

$$x^2 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30 = 0$$

و یا

$$x^2(x-3) + 3x(x-3) - 10(x-3) = 0$$

از آن جا $x_2 = 3$. بقیه ریشه ها، از معادله درجه دوم زیر به دست می آیند:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

که با حل آن نتیجه می شود:

$$x_3 = 2, \quad x_4 = 5$$

*

رنه دکارت (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰)، ریاضی دان و فیلسوف فرانسوی، مؤلف رساله مشهور «هندسه» (۱۶۳۷) که در آن، برای نخستین بار در تاریخ دانش، روش مختصاتی را پیشنهاد کرده است.

روش مختصاتی، به دکارت و فرما امکان داد تا هندسه تحلیلی را به وجود آورند. در هندسه تحلیلی، می توان هندسه را، از نظر معادله های جبری، مورد بررسی قرار داد.

دکارت ، نظریه معادله‌ها را، با وارد کردن نشانه‌های تازه‌ای، غنی‌تر و ساده‌تر کرد. او نخستین کسی بود که نشانه‌های x و y و z را برای مجهول انتخاب کرد (او، برای z ، ارجحیت قایل بود). همچنین، روش ضریب‌های نامعین را کشف کرد که امروز، کاربردی فراوان دارد. دکارت، در فلسفه و ریاضیات، از روش تحلیلی پیروی می‌کرد که، طبق آن ، باید هر مسأله را به اجزاء ترکیب دهنده خود تجزیه کرد و، سپس، با آغاز از ساده‌ترین جزءها، به طرف موردهای بغرنج‌تر حرکت کرد.

۱۸۹۰ داریم: $S = \frac{a_1}{1-q}$ ، که در آن، q عبارت است از قدر

نسبت تصاعد. چون $q = \frac{a_2}{a_1}$ ، پس

$$S = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{a_1}} = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2}$$

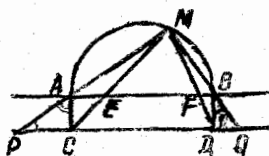
از آن جا

$$\frac{S}{S - a_1} = \frac{\frac{a_1^2}{a_1 - a_2}}{\frac{a_1^2}{a_1 - a_2} - a_1} = \frac{a_1^2}{a_1^2 - a_1^2 + a_1 a_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

*

پیر فرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵) ، ریاضی دان فرانسوی است، در جوانی تحصیل حقوق می‌کرد و وکیل مدافع شد. به ریاضیات تنها به‌خاطر علاقه‌ای که به آن داشت، می‌پرداخت. و همین کار ذوقی، او را به یکی از بزرگترین ریاضی دانان (تقریباً در تمام شاخه‌های این دانش) تبدیل کرد. فرما، بابرگترین دانشمندان زمان خود مکاتبه داشت و در نامه‌های خود، اساسی‌ترین نظریه‌های ریاضی را ، مورد بحث و انتقاد قرار می‌داد و، ضمناً، بررسی‌های خودش را هم به اطلاع آن‌ها را می‌رساند. فرما را باید یکی از بنیان‌گذاران و ادامه‌دهندگان راه ریاضیات عالی (حساب دیفرانسیلی و هندسه تحلیلی) دانست. نام او، بر روی چند قضیه از حساب (نظریه عددها) باقی مانده است.

۱۹۰. قبل از هر چیز، توجه می کنیم که (شکل ۵۶ را ببینید):



شکل ۵۶

$$\widehat{P} = \widehat{DBQ}, \quad \widehat{PAC} = \widehat{Q}$$

زیرا ضلع های آن برهم عمودند

($\widehat{PMQ} = 90^\circ$). از تشابه دو مثلث

ACP و BDQ داریم:

$$\frac{PC}{DB} = \frac{AC}{DQ}$$

و چون داریم $DB = AC$ ، بنابراین

$$PC \cdot DQ = AC^2$$

از آن جا که طول AC برابر طول ضلع مربع محاطی و AB برابر قطر دایره است:

$$AB^2 = 2AC^2$$

و بنابراین

$$2PC \cdot DQ = 2AC^2 = AB^2$$

یا

$$2PC \cdot DQ = CD^2 \quad (1)$$

سپس، به سادگی دیده می شود:

$$\frac{PC}{AE} = \frac{CD}{EF} = \frac{DQ}{FB} \quad (2)$$

برابری (۱) را، براساس برابری های (۲)، می توان این طور نوشت:

$$2AE \cdot FB = EF^2 \quad (3)$$

اگر برابری $AF + EB = AB + EF$ را مجذور کنیم، به دست می آید:

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + EF^2 + 2AB \cdot EF$$

که از آن جا، با در نظر گرفتن (۳)، خواهیم داشت:

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + 2AE \cdot FB + 2AB \cdot EF$$

و یا

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + 2(AE \cdot FB + AB \cdot EF) \quad (4)$$

این اتحاد را در نظر می گیریم:

$$(AE+EF)(EF+FB)=AE.FB+(AE+EF+FB)EF$$

یا

$$AF.EB=AE.FB+AB.EF \quad (۵)$$

و بالاخره، از (۴) ، با توجه به (۵) ، نتیجه می شود:

$$AF^2+EB^2=AB^2$$

۱۹۹۱. این مسأله، حالت خاص مسأله کلی تری است که به قضیه بزرگ

فرما مشهور شده است: معادله $x^n+y^n=z^n$ ، که در آن، n عددی درست و مثبت است، برای عددهای $n \geq 2$ ، دارای جواب درست برای x و y و z نیست.

فرما، معمولاً ضمن خواندن کتاب، درحاشیه های آن یادداشت هایی می کرد. مثلاً، وقتی که کتاب «حساب» دیوفانت را می خواند، درحاشیه صفحه ای که معادله سیال $x^2+y^2=z^2$ مورد بحث قرار گرفته بود، نوشت: «به هیچ وجه نمی توان يك توان سوم را به مجموع دو توان سوم، یا يك توان چهارم را به مجموع دو توان چهارم و، به طور کلی، يك توان با نمای بزرگتر از ۲ را به مجموع دو توان با همان نما تبدیل کرد. من اثبات عجیبی برای این حکم پیدا کرده ام، ولی در این جا، به دلیل کمبود جا، نمی توانم آن را بیان کنم».

هنوز این معما حل نشده است که فرما، چگونه استدلال کرده است و آیا واقعاً، به چنین اثباتی رسیده است؟ در واقع، با همه تلاش های بزرگترین ریاضی دانان، هنوز قضیه بزرگ فرما، به صورت کلی خود، نه ثابت شده است و نه رد. البته، برای مقدارهای جداگانه ای از n ، توانسته اند قضیه فرما را با دقت ثابت کنند. مثلاً، اولسر (۱۷۵۷-۱۷۸۳) ، عضو فرهنگستان پترزبورگ، قضیه فرما را، برای $n=3$ و $n=4$ ، ثابت کرد. دیریکله (۱۸۵۵-۱۸۵۹) ، ریاضی دان اهل گوتینگن آلمان، حالت $n=5$ را ثابت کرد و کومر (۱۸۱۵-۱۸۹۳) ، استاد دانشگاه برلن، به کمک روش های جدید توانست، درستی حکم قضیه بزرگ فرما را، تا $n=100$ ثابت کند. سرانجام، ریاضی دانان معاصر امریکایی، با استفاده از نتیجه گیری های کومر و

به كمك كامپيوتر ، ثابت كردند ، حكم فرما براى همه عددهاى از $n=3$ تا $n=4002$ درست است.

همان طور كه گفتيم ، حالت $n=4$ را اولر ثابت كرد. او ثابت كرد

معادله

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad (1)$$

براى مقدارهاى درست x و y و z ، جواب ندارد. براى اين منظور ، كافى است ثابت كنيم معادله

$$x^4 + y^4 = z^2 \quad (2)$$

براى مقدارهاى درست ، جواب ندارد. اگر بتوانيم ثابت كنيم ، معادله (2) براى عددهاى درست ، بدون جواب است ، در آن صورت ، معادله (1) هم ، جواب درست نخواهد داشت.

در واقع ، اگر عددهاى درست x_1 ، y_1 و z_1 ، جوابى از معادله (1) باشند ، بايد داشته باشيم:

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$$

و در اين صورت ، سه عدد x_1 ، y_1 و z_1 جوابى از معادله (2) خواهد بود. و اگر معادله اخير جواب درست نداشته باشد ، معادله (1) هم بدون جواب مى ماند.

بنابراين ، براى اين كه مسأله فرما (قضيه بزرگ فرما ، براى حالت $n=4$) حل شود ، بايد ثابت كنيم ، معادله (2) داراى جواب درست نيست. اثبات را با برهان خلف مى دهيم.

فرض مى كنيم x_1 ، y_1 و z_1 عددهاى درستى باشند كه در معادله (2) صدق مى كنند. ضمناً ، بدون اين كه به كلى بودن مطلب لطمه اى وارد آيد ، مى توان اين عددها را مثبت به حساب آورد ، زيرا روشن است كه اگر x_1 ، y_1 و z_1 در معادله (2) صدق كنند ، $|x_1|$ ، $|y_1|$ و $|z_1|$ هم در اين معادله صدق خواهند كرد. معادله (2) را ، بعد از قرار دادن اين سه عدد ، مى توان اين طور نوشت:

$$(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2$$

يعنى عددهاى x_1^2 ، y_1^2 و z_1 عددهاى فيثاغورى هستند و ، همان طور كه

می‌دانیم، چنین سه عددی را می‌توان، نسبت به دو عدد فرد u و v که نسبت به هم اول‌اند، بیان کرد (ضمناً $u > v$):

$$x_1^2 = u \cdot v \quad (3)$$

$$y_1^2 = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad (4)$$

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (5)$$

چون در برابری (۳)، حاصل ضرب دو عدد u و v ، که نسبت به هم اول‌اند، مجذور کامل شده است، باید u و v ، هر کدام مجذور کامل باشند (چرا؟)، یعنی

$$u = u_1^2 \quad (6)$$

$$v = v_1^2 \quad (7)$$

ضمناً عددهای u_1 و v_1 هم باید عددهایی فرد و نسبت به هم اول باشند و $u_1 > v_1$. برابری‌های ۳، ۴ و ۵، با توجه به برابری‌های (۶) و (۷)، به این صورت درمی‌آیند:

$$x_1^2 = u_1^2 v_1^2 \quad (8)$$

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} \quad (9)$$

$$z_1 = \frac{u_1^4 + v_1^4}{2} \quad (10)$$

از برابری (۹) نتیجه می‌شود:

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_1^2 - v_1^2)}{2} \quad (11)$$

از آن جا که مجموع و تفاضل دو عدد فرد، همیشه عددی است زوج، بنابراین

$$u_1 + v_1 = 2u_2 \quad (12)$$

$$u_1 - v_1 = 2v_2 \quad (13)$$

از آن جا

$$u_1 = u_2 + v_2 \quad (14)$$

$$v_1 = u_2 - v_2 \quad (15)$$

در این جا هم u_2 و v_2 نسبت به هم اول اند، زیرا در غیر این صورت، با توجه به رابطه های (۱۴) و (۱۵)، نتیجه می شود که u_1 و v_1 نسبت به هم اول نیستند. و این، مخالف فرض است.

یادآوری می کنیم که، چون u_2 و v_2 نسبت به هم اول اند، مجموع مجذورهای آنها هم نسبت به هر کدام از این عددها اول است، یعنی $u_2^2 + v_2^2$ ، به جز واحد، هیچ مقسوم علیه مشترکی با u_2 و v_2 ندارد (چرا؟). اکنون y_2 را از رابطه (۱۱)، بر حسب u_2 و v_2 ، طبق رابطه های (۱۴) و (۱۵)، به دست می آوریم. برای این منظور، ابتدا u_2^2 و v_2^2 را از رابطه های (۱۴) و (۱۵) پیدا می کنیم:

$$u_2^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1$$

$$v_2^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1$$

و از آن جا

$$u_2^2 + v_2^2 = 2(u_1^2 + v_1^2) \quad (16)$$

$$u_2^2 - v_2^2 = 4u_1v_1 \quad (17)$$

حالا، با استفاده از رابطه های (۱۱)، (۱۶) و (۱۷)، به دست می آید:

$$y_2^2 = 4u_1v_1(u_1^2 + v_1^2)$$

که با تقسیم دو طرف این برابری بر ۴، خواهیم داشت:

$$\frac{y_2^2}{4} = u_1v_1(u_1^2 + v_1^2) \quad (18)$$

توجه کنیم که در میان سه عدد فیثاغوری x_1^2 ، y_1^2 ، z_1^2 ، دو عدد نخست نمی توانند با هم فرد باشند، بنابراین، همیشه می توان x_2 را فرد، y_2 را زوج و، در نتیجه، z_2 را فرد به حساب آورد. به این ترتیب، y_2^2 ، عددی زوج است. ولی هر عدد زوج مجذور کامل بر ۴ بخش پذیر است و بنابراین، $\frac{y_2^2}{4}$ عددی است درست.

در سمت راست رابطه (۱۸) به حاصل ضرب سه عدد u_1 ، v_1 و $u_1^2 + v_1^2$ را داریم که دو به دو نسبت به هم اول اند و، ضمناً، این حاصل ضرب مجذور

کامل است (زیرا، برابر است با مجذور $\left(\frac{y_1}{2}\right)$). بنابراین، به ناچار باید هر کدام

از این سه عدد خود مجذور کامل باشند، یعنی باشیم:

$$u_2 = x_2^2, \quad v_2 = y_2^2, \quad u_2 + v_2 = z_2^2$$

که از آن جا نتیجه می شود:

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$$

به این ترتیب، اگر (x_1, y_1, z_1) ، جواب درستی از معادله

$$x^4 + y^4 = z^2$$

هم وجود دارد که در این معادله صدق می کند و، ضمناً، باید داشته باشیم:

$$z_1 > z_2$$

نا برابری $z_1 > z_2$ را می توان، با این استدلال، ثابت کرد.

$$z_2^2 = u_2 + v_2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u + v}{2}$$

از طرف دیگر

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

از آن جا

$$z_1 > z_2^2 \Rightarrow z_1 > z_2$$

اکنون، اگر از جواب درست (x_2, y_2, z_2) آغاز کنیم، می توانیم

با استدلالی شبیه استدلال بالا، ثابت کنیم که جواب درست سه گانه دیگری

هم، مثل (x_3, y_3, z_3) وجود دارد که در معادله (2) صدق می کند. و از

این عددهای درست سه گانه، تهر جا که بخواهیم پیدا می شود. این جواب ها،

دنباله ای نامتناهی را به وجود می آورند:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots$$

و در میان آن ها، عددهای درست و مثبت

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

دنباله ای نامتناهی تشکیل می دهند که، به صورتی یکنوا (مونوتون)، نزولی

است:

$$Z_1 > Z_2 > Z_3 > \dots$$

و منجر به تضادی منطقی می شود.

در واقع، این دنباله، نمی تواند بیش از Z_1 جمله داشته باشد و، بنابراین، نمی تواند نامتناهی باشد. به این ترتیب، فرض وجود جوابی با عددهای درست برای معادله (۲)، منجر به تناقض منطقی می شود. بنابراین، معادله (۲) و، همراه با آن، معادله (۱)، نمی تواند جوابی شامل عددهای درست داشته باشد.

یادداشت: روشی که برای حل این مسأله به کار رفته است، روش نزول نامحدود نامیده می شود. در این روش، با مبنا قرار دادن يك جواب دنباله بی پایانی از جوابها پیدا می شود که از عددهای درست و مثبتی که به طور یکنوا نزولی اند، تشکیل شده است:

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

از این روش، برای حل حالت های خاص قضیه بزرگ فرما، می توان استفاده کرد، ولی به کار گرفتن آن، برای حالت کلی

$$x^n + y^n = z^n$$

(که در آن، n عددی است طبیعی)، عملی نیست.

۱۹۲. $OABC$ را، کنج سه وجهی مفروض می گیریم، که در آن، $OA = a$ ، $OB = b$ و $OC = c$. در این صورت داریم:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}ab, S_{OAC} = \frac{1}{2}ac, S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$$

از آنجا

$$S_{OAB}^2 + S_{OAC}^2 + S_{OBC}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \quad (۱)$$

بنابره قضیه فیثاغورث، به دست می آید:

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

با استفاده از رابطه هرون داریم:

$$S_{ABC}^2 = \frac{AC + BC + AB}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{AC - BC + AB}{2} \cdot \frac{-AC + BC + AB}{2} = \\
 & = \frac{1}{16} (AC^2 + 2AB \cdot BC + BC^2 - AB^2) \times \\
 & \times (AB^2 + 2AC \cdot BC - AC^2 - BC^2) = \\
 & = \frac{1}{16} (4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2) = \frac{1}{4} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2);
 \end{aligned}$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{4} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \quad (2)$$

اکنون، باتوجه به برابری‌های (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$S_{ABC}^2 = S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OAC}^2$$

*

این مسأله، یکی از معادله‌های فضائی قضیه فیثاغورث است. پرفسور
و. لیتمان معتقد است که این شباهت را، برای نخستین بار، یوهان فولگابِر، اهل
اولم آلمان، در سال ۱۶۲۲ پیدا کرده است.

۱۹۳. راه حل جبری. یکی از ضلع‌های مستطیل را x و نصف محیط
آن را p می‌گیریم. در این صورت، مساحت مستطیل S چنین خواهد بود:

$$S = x(p - x)$$

یا

$$x^2 - px + S = 0$$

باحل این معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}$$

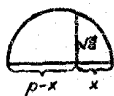
روشن است که x ، تنها با شرط $S \leq \frac{p^2}{4}$ یک عدد حقیقی است؛ ضمناً

حداکثر مقدار S برابر است با $\frac{p^2}{4}$ ، یعنی

$$S_{\max} = \frac{p^2}{4} \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

به این ترتیب، از میان مستطیل‌هایی که محیط برابر دارند، مساحت مربع، حداکثر مقدار ممکن است.

دایره حل هندسی. نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم که قطر آن برابر با p ، یعنی نصف محیط مستطیل، باشد (شکل ۵۷). قطر نیم‌دایره را به دو قسمت



شکل ۵۷

x و $p-x$ تقسیم و از نقطه تقسیم،

عمودی بر قطر رسم می‌کنیم. طول

این عمود، از نظر عددی برابر است با

$\sqrt{S}$ ، زیرا باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(p-x) \cdot x = S$$

روشن است که مساحت S ، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که طول

این عمود برابر با شعاع دایره باشد، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$S = \frac{p^2}{4}$$

و این، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$p-x=x \Rightarrow x=\frac{p}{2}$$

یعنی، وقتی که مستطیل به صورت مربع درآید.

*

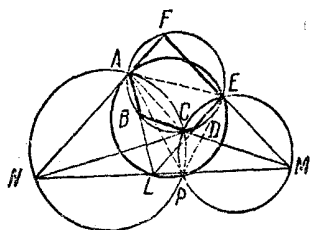
مؤلف این مسأله، جرج والیس (۱۶۱۶-۱۷۰۳)، ریاضی‌دان بزرگ

انگلیسی و استاد دانشگاه آکسفورد است که رساله‌های زیادی در زمینه ریاضیات دارد. والیس، در زمینه پایه‌گذاری علمی هندسه، به عنوان يك دانش‌قیاسی و براساس اصول از قبل تعیین شده، کار می‌کرد. او توانست اصل توازی را ثابت کند و در ردیف قضیه‌ها قرار دهد. البته، این اثبات، با وارد کردن اصل دیگری انجام گرفته است، که به «اصل والیس» معروف است: برای هر شکلی، شکلی متشابه به آن و با اندازه‌های دلخواه وجود دارد.

۱۹۴. نقطه‌های برخورد ضلع‌های روبه‌روی AB و DE ، BC و

EF ، CD و FA را، به ترتیب، L ، M و N می‌نامیم. باید ثابت کنیم،

نقطه‌های L ، M و N روی يك خط راست (خط راست پاسکال) قرار دارند.



شکل ۵۸

نقطه A را به C و A را به E وصل می کنیم (روی شکل ۵۸، این خطها را به صورت خط چین نشان داده ایم) دایره های محیطی مثلث های ACN، ECM و AEL را رسم می کنیم. دو دایره اول، به جز C، در نقطه P هم یکدیگر را قطع می کنند. ثابت

می کنیم، دایره سوم هم از P می گذرد. برای این منظور کافی است ثابت کنیم: $\widehat{APE} = \widehat{ALE}$. داریم:

$$\begin{aligned}\widehat{APE} &= \widehat{APC} + \widehat{CPE} = \frac{\widehat{DEF} - \widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{FAB} - \widehat{CDE}}{2} = \\ &= \frac{\widehat{EF} - \widehat{CD} + \widehat{FA} - \widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{EFA} - \widehat{BCD}}{2} = \widehat{ALE}\end{aligned}$$

اکنون، ثابت می کنیم، نقطه های M و N و P روی یک خط راست قرار دارند. برای این منظور ثابت می کنیم:

$$\widehat{CPM} + \widehat{CPN} = 180^\circ$$

به ترتیب داریم:

$$\widehat{CPM} = 180^\circ - \widehat{CEM} = \widehat{CEF} = \frac{1}{4}\widehat{FABC},$$

$$\widehat{CPN} = 180^\circ - \widehat{CAN} = \widehat{CAF} = \frac{1}{4}\widehat{CEF},$$

$$\widehat{CPM} + \widehat{CPN} = \frac{1}{4}\widehat{FABC} + \frac{1}{4}\widehat{CEF} = \frac{1}{4}\widehat{FABCEF} = 180^\circ$$

به همین ترتیب، ثابت می کنیم، نقطه های L، P و M هم، روی یک خط راست قرار دارند. برای این منظور، ثابت می کنیم:

$$\widehat{EPM} + \widehat{EPL} = 180^\circ$$

به ترتیب داریم:

$$\widehat{EPM} = \widehat{ECM} = 180^\circ - \widehat{BCE} = 180^\circ - \frac{1}{4}\widehat{EFAB},$$

$$\widehat{EPL} = 180^\circ - \widehat{BAE} = 180^\circ - \frac{1}{4}\widehat{BCDE},$$

$$\begin{aligned}\widehat{EPM} + \widehat{EPL} &= 180^\circ - \frac{1}{4}\widehat{EFAB} + 180^\circ - \frac{1}{4}\widehat{BCDE} = \\ &= 360^\circ - \frac{1}{4}\widehat{BCDEFAB} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ\end{aligned}$$

به این ترتیب، هم سه نقطه M و P و N و هم سه نقطه L و P و M، بر یک خط راست واقع اند. بنابراین، نقطه های M و L و N روی یک خط راست قرار می گیرند.

*

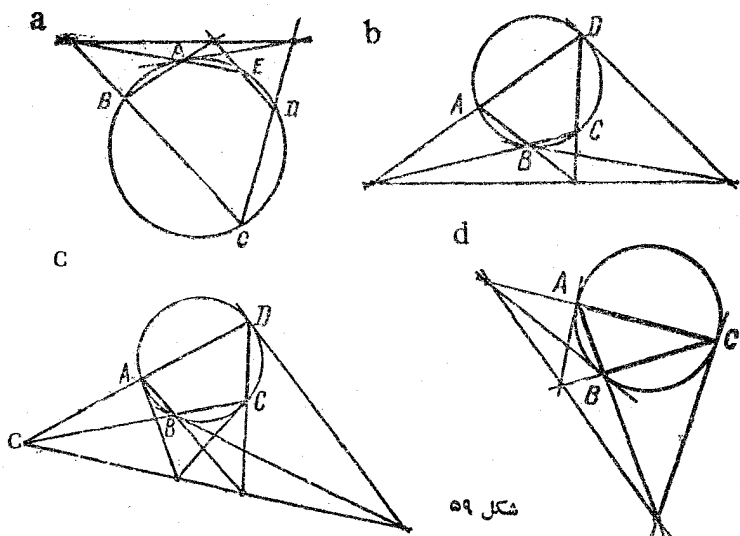
بلز پاسکال (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲)، ریاضی دان، فیزیک دان و فیلسوف فرانسوی، از همان زمان کودکی استعداد ریاضی خود را آشکار کرد. در نوجوانی، نخستین قضیه های هندسه مسطحه را پیش خود کشف کرد. بین شکل های ابداعی او، مثلث، دایره، متوازی الاضلاع، هرم و غیره دیده می شد.

مسئله پاسکال، که راه حل آن را در این جا آوردیم، حالت خاصی است از مسئله کلی تری که به «قضیه پاسکال» معروف است و می توان آن را، به این صورت تنظیم کرد: «در هر شش ضلعی که قابل محاط در یک مقطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی، سهمی، دو خط راست) باشد، نقطه های برخورد ضلع های روبه رو، روی یک خط راست قرار دارند». پاسکال، این قضیه را، در ۱۶ سالگی ثابت کرد، ابتدا برای دایره (همان مسئله ای که در این جا حل آن را آوردیم) و سپس، برای هر مقطع مخروطی دلخواه. او اثبات را، در حالت کلی و از این راه به دست آورد که می توان هر مقطع مخروطی را از دایره و از طریق تصویر و مقطع به دست آورد. پاسکال، آن چه را تا سال ۱۶۳۹ کشف کرده بود، در سال ۱۶۴۰، در نخستین رساله خود به نام «نظریه مقطع های مخروطی» چاپ کرد.

قضیه پاسکال، یکی از اساسی ترین قضیه های هندسه تصویری معاصر است، دانشی که کلی ترین ویژگی های شکل را، که ضمن هر گونه مقطع و تصویر مرکزی ثابت می ماند، مورد مطالعه قرار می دهد. زندگی نامه نویسان پاسکال، به حق، معتقدند که تنها یکی از این قضیه ها کافی بود تا نام پاسکال را، در ردیف دانشمندان ریاضی درجه اول قرار دهد.

پاسکال، هم در ریاضیات و هم در سایر زمینه ها، کشف های مهمی دارد. مثلاً، در رساله «ویژگی بخش پذیری عددها»، قاعده ای کلی، برای بخش پذیری بودن يك عدد درست بر عدد درست دیگر، پیدا کرده است که بر اساس محاسبه مجموع رقم های مقسوم قرار دارد. در رساله «مثلث حسابی»، روش محاسبه ضریب های بسط دوجمله ای و يك رشته از قانون های حساب احتمال را تنظیم کرده است. ضمناً، استدلال ها را باروش استقرای ریاضی داده است و، در حقیقت، پاسکال بود که روش استقرای ریاضی را تنظیم کرد و برای اثبات قضیه ها و حل مسأله ها به کار برد. محاسبه های مربوط به مساحت ها و حجم ها، بهانه ای بود تا پاسکال به کشف حساب دیفرانسیلی و انتگرالی برسد. ۱۹۵. حالت های حدی زیر را، از مسأله پاسکال، مورد بررسی قرار می دهیم: حالت اول. فرض کنید، دو رأس شش ضلعی محاطی برهم منطبق شوند، در این صورت، ضلعی که این دو نقطه را به هم وصل می کرد، به مماس تبدیل می شود (شکل ۵۹-a). در این حالت، حکم مسأله چنین می شود: در هر پنج ضلعی قابل محاط در دایره، نقطه های برخورد دوجفت ضلع های غیرمجاور و نقطه برخورد ضلع پنجم با مماس در رأس روبه رو (بردايره محیطی)، روی يك خط راست واقع اند.

حالت دوم. به همین ترتیب، چهار ضلعی محاطی را می توان همچون يك شش ضلعی در نظر گرفت که، در آن، دوجفت رأس برهم منطبق شده باشند. در این حالت، این حکم به دست می آید: در هر چهار ضلعی محاطی، دوجفت ضلع های روبه رو و يك جفت مماس های دو رأس روبه رو (بردايره محیطی چهار ضلعی)، در نقطه هایی یکدیگر را قطع می کنند که روی يك خط راست قرار دارند (شکل ۵۹-b).



شکل ۵۹

بارسم مماس‌ها، در همهٔ رأس‌های چهارضلعی، به‌سادگی ثابت می‌شود:
در هر چهارضلعی محاطی، دو جفت ضلع‌های روبه‌رو و دو جفت مماس‌های
در رأس‌های روبه‌رو، در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند که روی یک خط
راست قرار دارند (شکل ۵۹-۱۰۹).

حالت سوم. سرانجام مثلث را می‌توان یک‌شش‌ضلعی محاطی دانست
که در آن همهٔ رأس‌ها مضاعف‌اند (یعنی، رأس‌ها دوبه‌دو برهم منطبق‌اند).
در این حالت، این حکم درست است: در هر مثلثی که در یک دایره محاط باشد،
سه نقطه برخورد هر ضلع با مماس در رأس روبه‌رو، بر یک خط راست قرار
دارند (شکل ۵۹-۱۰۹).

۱۹۹. این مسأله‌را، از رسالهٔ «ویژگی بخش‌پذیری عددها» برداشته‌ایم.
پاسکال، مسأله‌را، این‌طور حل می‌کند: فرض کنید، باقی‌ماندهٔ تقسیم
۱۰ بر A برابر r_1 ، باقی‌ماندهٔ تقسیم $10r_1$ بر A برابر r_2 ، باقی‌ماندهٔ
تقسیم $10r_2$ بر A برابر r_3 باشد و غیره. اگر عدد مفروض، مثلاً، چهاررقمی
و به‌صورت $\overline{MCDU}$ باشد (که در آن، U, D, C, M ، به‌ترتیب، رقم‌های

هزارگان، صدگان، دهگان و یکان عدد است)، نشانه بخش پذیری این عدد بر A چنین است:

اگر $U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3$ بر A بخش پذیر باشد (یعنی مضربی از A باشد)؛ عدد $\overline{MCDU}$ هم بر A بخش پذیر است.
در واقع، فرض کنید:

$$10 = Aq_1 + r_1,$$

$$10r_1 = Aq_2 + r_2,$$

$$10r_2 = Aq_3 + r_3$$

در آن صورت، داریم:

$$\begin{aligned} U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3 &= U + D(10 - Aq_1) + \\ &+ C(10r_1 - Aq_2) + M(10r_2 - Aq_3) = U + 10D + \\ &+ 10C(10 - Aq_1) + 10M(10r_1 - Aq_2) - (A \text{ مضرب}) = \\ &= U + 10D + 100C + 100M(10 - Aq_1) - (A \text{ مضرب}) = \\ &= U + 10D + 100C + 1000M - (A \text{ مضرب}) \end{aligned}$$

و بنابراین، حکم ثابت می شود.

۱۹۷. مسأله، با این استدلال حل می شود: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ ، یعنی $\frac{13}{12}$

می شود ۲۶۰۰۰ لیور، از آن جا $\frac{1}{12}$ برابر ۳۰۰۰ لیور می شود. بنابراین، سهم اولی ۱۲۰۰۰، سهم دومی ۸۰۰۰ و سهم سومی ۶۰۰۰ لیور می شود.

*

این مسأله، از مجموعه مسأله های ژاک اوزانام (۱۶۴۰-۱۷۱۷)، ریاضی دان فرانسوی برداشته شده است. اوزانام، مولف کتاب درسی چهارجلدی، به نام «دوره ریاضیات» است.

$$\frac{y^4 - \frac{1}{3}a^2y^2 + 3a^2y - \frac{1}{4}a^4}{y^4 - 2y^2 + a^2y^2} \left| \frac{y^2 - 2ay + a^2}{y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2}} \right.$$

$$2ay^3 - 2\frac{1}{4}a^2y^2 + 3a^2y$$

$$2ay^3 - 2a^2y^2 + 2a^2y$$

$$-\frac{1}{4}a^2y^2 + a^2y - \frac{1}{4}a^4$$

$$-\frac{1}{4}a^2y^2 + a^2y - \frac{1}{4}a^4$$

○

*

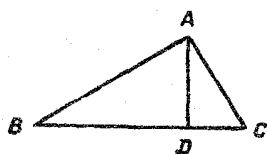
این مسأله ، از کتاب «حساب عمومی» نیوتون (۱۶۴۲-۱۷۲۷)،
ریاضی دان و فیزیک دان انگلیسی برداشته شده است.

نیوتون کشاورز زاده بود و پدرش قبل از تولد پسر خود از دنیا رفت.
دانشمند آینده، از همان دوران کودکی، گرایش خود را به کار مستقل و آموزش
جدی نشان داد. در دانشگاه کمبریج تحصیل کرد و در آن جا بود که معلمان را
از استعداد ریاضی خود، دچار حیرت کرد. بعدها استاد همین دانشگاه شد.
از سال ۱۷۰۳، رئیس جامعه سلطنتی (فرهنگستان علوم) لندن شد که بسیاری
از دانشمندان طراز اول آن زمان را، در خود جمع کرده بود.

ایزاک نیوتون، مؤلف کتاب مشهور «مبانی ریاضی فلسفه طبیعی» است
(۱۶۸۷)؛ که در آن، قانون های مشهور نیوتون در زمینه مکانیک و یک رشته
کشف های دیگر را، مطرح کرده است. در سال ۱۷۸۷، کتاب «حساب عمومی»
را نوشت که، در آن، از روش جبری با نشانه ها و طرح ریزی امروزی،
صحبت کرده است.

بر کتیبه ای که در آرامگاه او در لندن نگه داری می شود، نوشته شده

است: «این جا ، ایزاك نيوتون آرميده است كه با نيروى شبه‌خدايى خود توانست حركت و شكل سياره‌ها و جزر و مد اقيانوس‌ها را ، به يارى روش رياضى خودش روشن كند. او، براى نخستين بار، پرتوهاى نورانى را مورد مطالعه قرار داد و، از آن جا، ويژگى رنگ‌ها را كشف كرد، چيزى كه تا آن زمان، هيچ كس در باره آن حدس هم نزده بود... خوشا به حال از دنيا رفته‌گان، كه چنين انسان باشكوهى، درميان آن‌هاست».



شكل ۶۰

۰۱۹۹ نيوتون مسأله را اين طور حل مى كند: فرض كنيم $BC = a$ و $AD = y$ (شكل ۶۰). چون زاويه ABD معلوم است ، نسبت بين پارمخه‌هاى AD و BD هم معلوم

خواهد بود. (از روى جدول سينوس‌ها يا تانژانت‌ها) ، اين نسبت را $\frac{d}{l}$ مى ناميم. به اين ترتيب

$$\frac{d}{l} = \frac{y}{BD} \Rightarrow BD = \frac{l \cdot y}{d}$$

به همين ترتيب، با معلوم بودن زاويه ACD ، نسبت AC به CD

معلوم است كه آن را برابر $\frac{d}{f}$ مى گيريم. از آن جا

$$DC = \frac{f \cdot y}{d}$$

ولى مى دانيم: $BD + DC = BC$ ، بنابر اين

$$\frac{l \cdot y}{d} + \frac{f \cdot y}{d} = a$$

با حل اين معادله ، نسبت به مجهول y ، به دست مى آيد:

$$y = \frac{ad}{l + f}$$

اين مسأله هم ، از كتاب «حساب عمومى» نيوتون برداشته شده است.

۲۰۰ حل نیوتون. اگر ۱۲ گاو در ۴ هفته $3\frac{1}{3}$ آکر از چراگاه را

می‌خورند، باتوجه به تناسب ۳۶ گاو در ۴ هفته یا ۱۶ گاو در ۹ هفته یا ۸ گاو در ۱۸ هفته، ۱۰ آکر از چراگاه را می‌خورند. این وضع، به فرض آن است که علف‌ها رشد نکنند. ولسی علف رشد می‌کند و، به همین جهت، ۲۱ گاو می‌توانند در ۹ هفته روی ۱۰ آکر چراگاه، غذا بخورند. یعنی علفی که در ۱۰ آکر در ۵ هفته آخر روییده است، می‌تواند در جریان ۹ هفته ۲۱ گاو را نسبت به ۱۶ گاو، یعنی ۵ گاو را خوراك بدهد یا، در واقع، $\frac{5}{4}$ گاو را در ۱۸ هفته سیر کند، به همین ترتیب، رشد علف در ۱۴ هفته (اضافه ۱۸ نسبت به ۴)، می‌تواند برای چریدن ۷ گاو در ۱۸ هفته کافی باشد. به این ترتیب، داریم:

$$(7 \text{ گاو}) : (\frac{5}{4} \text{ گاو}) = (14 \text{ هفته}) : (5 \text{ هفته})$$

به این ترتیب، اگر این ۷ گاو را، که می‌توانند تنها از رشد علف‌ها استفاده کنند، به ۸ گاوی که علف بدون رشد را می‌خورند، اضافه کنیم، ۱۵ گاو در جریان ۴ هفته به دست می‌آید. سرانجام، اگر ۱۰ آکر می‌تواند ۱۵ گاو را در جریان ۱۸ هفته تغذیه کند، بنابراین، باتناسب معلوم می‌شود که، ۲۴ آکر می‌تواند در همین مدت ۳۶ گاو را تغذیه کند.

اکنون، به حل جبری این مساله می‌پردازیم. فرض می‌کنیم، y سهم ذخیره‌ای علفی باشد که در آکر، در جریان ۱ هفته، از رشد علف‌ها به دست

می‌آید. در این صورت، علف چراگاه اول، در جریان يك هفته به اندازه $3\frac{1}{3}y$ و

در جریان ۴ هفته به اندازه $4\frac{40}{3}y$ مقدار اولیه علفی که در آن بوده است،

ذخیره می‌کند. بنابراین، ۱۲ گاو در جریان ۴ هفته، همان قدر علف می‌خورند

که در چراگاهی به وسعت $(3\frac{1}{3} + 4\frac{40}{3}y)$ آکر وجود دارد. سپس، به سادگی

محاسبه می شود که سطح لازم چراگاه برای خوراك ۱ گاو در ۱ هفته عبارت است از

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y}{48} = \frac{10 + 40y}{144} \quad (\text{آكر})$$

اکنون، به محاسبه مساحتی از چراگاه می پردازیم که ذخیره علف آن، برای تغذیه ۲۱ گاو در جریان ۹ هفته کافی باشد. این مساحت برابر است با $10 + 90y$ ، زیرا رشد هفتگی در ۱ آكر برابر است با y که در ۹ هفته برای ۱ آكر برابر $9y$ و برای ۹ هفته در ۱۰ آكر برابر $90y$ می شود. بنابراین، مساحتی از چراگاه که برای تغذیه ۱ گاو در جریان ۱ هفته لازم است، عبارت است از

$$\frac{10 + 90y}{9 \times 21} = \frac{10 + 90y}{189} \quad (\text{آكر})$$

چون میزان تغذیه باید یکی باشد، داریم:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}$$

از آن جا

$$y = \frac{1}{12}$$

اکنون، به سادگی می توانیم مساحتی از چراگاه را که برای چریدن يك گاو در جریان يك هفته لازم است، به دست آوریم. این مساحت، چنین است:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 \times \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \quad (\text{آكر})$$

تعداد گاوهای را که می توانند در چراگاه سوم در جریان ۱۸ هفته تغذیه شوند، با x نشان می دهیم. به این معادله می رسمیم:

$$\frac{24 + 24 \times 18 \times \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54}$$

که با حل آن، به دست می آید: $x = 36$.

بنابراین، چراگاه سوم، در جریان ۱۸ هفته، می تواند ۳۶ گاو را تغذیه کند.

۲۰۱. پاسخ: ۱۸۴۰ فونت.

راه حل نیوتون: «برای حل این مساله، باید به بعضی ملاحظه ها که

به طور پنهانی در آن وجود دارد، توجه کنیم.

با زبان جبری

بازبان عادی

x

تاجر سرمایه ای دارد

$x - 100$

که در سال، ۱۰۰ فونت

آن را خرج می کند

$$\frac{4x - 400}{3} \text{ یا } x - 100 + \frac{x - 100}{3}$$

به باقی مانده پولش، $\frac{1}{3}$

آن اضافه می شود.

$$\frac{4x - 700}{3} \text{ یا } \frac{4x - 400}{3} - 100$$

در سال دوم، دوباره،

۱۰۰ فونت خرج

می کند.

$$\frac{16x - 2800}{9} \text{ یا } \frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$$

و به باقی مانده، یک سوم

آن، اضافه می شود.

$$\frac{16x - 2800}{9} - 100$$

در سال سوم، باز هم،

$$\frac{16x - 3700}{9} \text{ یا}$$

۱۰۰ فونت خرج می کند

$$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$$

و به باقی مانده، یک سوم

آن اضافه می شود.

$$\frac{64x - 14800}{27} \text{ یا}$$

بنابراین، حل مساله، منجر به حل این معادله می شود:

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$$

دو طرف معادله را در ۲۷ ضرب می کنیم، به دست می آید:

$$64x - 14800 = 54x$$

از هر دو طرف ۵۴x را کم می کنیم: $10x - 14800 = 0$. دو طرف را بر ۱۰ تقسیم می کنیم، به دست می آوریم: $x = 1480$. بنابراین، سرمایه نخستین این تاجر، برابر ۱۴۸۰ فونت بوده است.

۲۰۲. هر دو جمله سمت چپ برابری را به صورت $a + ib$ در می آوریم.

برای جمله اول داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sqrt{-3}} &= \sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

به همین ترتیب، برای جمله دوم به دست می آید:

$$\sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{\frac{3}{2} - i\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

و از آن جا

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$$

*

مؤلف این مساله، گوتفرید ویلهلم لایب نیتس (۱۶۶۶ - ۱۷۱۶)، ریاضی دان و فیلسوف آلمانی، در لایپزیک متولد شد. پدرش محضر دار و استاد اخلاق بود. در شهر زاد و بومی خود وارد دانشگاه شد و به تحصیل حقوق پرداخت. به خاطر منطقی بودن ریاضیات به این دانش علاقه مند شد. از همان کودکی به مطالعه کتاب های علمی شوق داشت و نوشته های ارسطو و دکارت را مطالعه کرد. کار علمی لایب نیتس، با فعالیت دولتی او، به عنوان فرستاده سیاسی

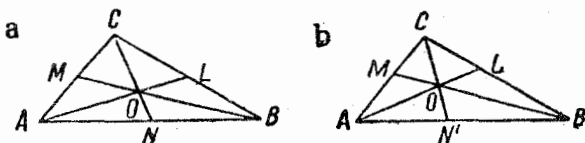
به پاریس، مخلوط شده بود. در سال ۱۶۷۳ در انگلستان بود و، در آن جا، ماشین حسابی را که خود او - بعد از آشنایی با ماشین حساب پاسکال - ساخته بود، در جامعه سلطنتی، به معرض نمایش گذاشت. بعد از آن که به پاریس بازگشت، به عضویت جامعه سلطنتی انتخاب شد.

لایب نیتس، هم زمان با نیوتون و بدون رابطه با او، به آنالیز ریاضی معاصر - حساب دیفرانسیلی و انتگرالی - دست یافت.

او مقدمات نظریه دترمینانها را، که ضمن حل دستگاههای درجه اول چند مجهولی پدید آمده بود، طرح ریخت. لایب نیتس، به جز اینها، کارهای زیادی درباره ویژگیهای منحنیها و تجزیه تابعها به رشته دارد که منجر به نتیجه گیریهای مهمی شد.

۱.۲۰۳) شرط لازم است. فرض می کنیم خطهای راست BM ، AL و CN (شکل ۶۱ - a)، در نقطه O به هم رسیده باشند (حالت توازی خطهای راست را به عهده خواننده می گذاریم). ثابت می کنیم، در این حالت، این رابطه برقرار است:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$



شکل ۶۱

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AN}{NB} &= \frac{S_{ACN}}{S_{NCB}} = \frac{S_{AON}}{S_{NOB}} = \\ &= \frac{S_{ACN} - S_{AON}}{S_{NCB} - S_{NOB}} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، ثابت می شود:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{BOA}}{S_{COA}}; \quad \frac{CM}{MA} = \frac{S_{COB}}{S_{AOB}}$$

از این جا، بعد از ضرب و ساده کردن، به دست می آید.

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \cdot \frac{S_{BOA}}{S_{COA}} \cdot \frac{S_{COB}}{S_{AOB}} = 1$$

(۲) شرط کافی است. اکنون فرض می کنیم، این رابطه برقرار باشد:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad (1)$$

ثابت می کنیم که، در چنین صورتی، خطهای راست AL، BM و CN از یک نقطه می گذرند.

نقطه برخورد خطهای راست AL و BM را O می گیریم (شکل ۶۱)

(b) و آن را به نقطه C وصل می کنیم. خطهای راست AL، BM و CN' در نقطه O به هم رسیده اند، بنابراین در مورد آنها، بنابر قسمت اول مساله، لازم بودن شرط)، باید داشته باشیم:

$$\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad (2)$$

از برابری دادن سمت چپ برابری های (۱) و (۲)، بعد از ساده کردن، به دست می آید:

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB} \Rightarrow \frac{AN' + N'B}{N'B} = \frac{AN + NB}{NB}$$

و یا

$$\frac{AB}{N'B} = \frac{AB}{NB} \Rightarrow N'B = NB$$

یعنی N' بر N منطبق است. بنابراین، خط راست CN بر خط راست CN' قرار می گیرد و از نقطه O می گذرد، یعنی سه خط راست AL، BM و CN در نقطه O به هم می رسند.

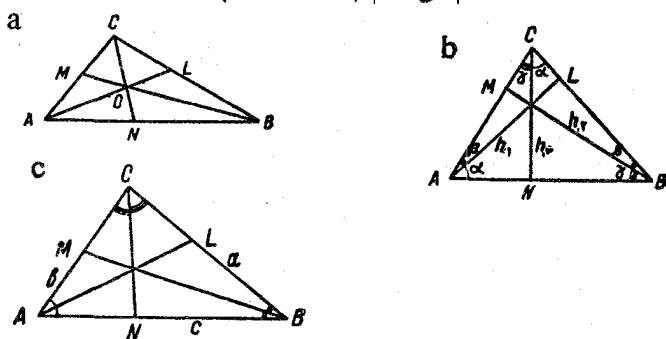
*

جی یو و انوسه و (۱۶۴۸ - ۱۷۳۴)، هندسه دان ایتالیایی، به حرفه

مهندسی هیدرولیک اشتغال داشت. مساله سه واره از رساله او به نام «در باره خطهای راست» (۱۶۷۸) برداشته ایم. خود سه واره، مساله را با روش خالص هندسی

و با تکیه بر قانون‌های استاتیك، یعنی بر مبنای ملاحظه‌های مکانیکی، حل کرده است.

(۱۰۲۰۴) مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم و میانه‌های AL، BM و CN و آن را رسم می‌کنیم (شکل ۶۲-ا).



شکل ۶۲

برای میانه‌ها داریم:

$$AN = NB, BL = LC, CM = MA$$

و بنابراین، رابطه

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

خود به خود برقرار است و، در نتیجه، میانه‌های AL و BM و CN از یک نقطه می‌گذرانند.

(۲) AL، BM و CN را ارتفاع‌های مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۶۲-ب).

زاویه بین ارتفاع‌ها و ضلع‌های مثلث را α ، β و γ می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{AN}{NB} = \frac{h_3 \cdot \tan \gamma}{h_3 \cdot \tan \alpha} = \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha} \quad (۱)$$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{h_1 \cdot \tan \alpha}{h_1 \cdot \tan \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad (۲)$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{h_2 \cdot \tan \beta}{h_2 \cdot \tan \gamma} = \frac{\tan \beta}{\tan \gamma} \quad (۳)$$

که بعد از ضرب رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳)، به دست می‌آید:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{tg \gamma \cdot tg \alpha \cdot tg \beta}{tg \alpha \cdot tg \beta \cdot tg \gamma} = 1$$

و رابطهٔ اخیر، به معنای آن است که ارتفاع‌های AL، BM و CN مثلث، در یک نقطه به هم می‌رسند.

(۳) حالا، AL، BM و CN را نیمسازهای زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۶۲-۱). برای سادگی کار، ضلع‌های مثلث را با a، b و c نشان می‌دهیم. بنابراین ویژگی نیمساز در مثلث، این رابطه‌ها را داریم

$$\frac{AN}{NB} = \frac{b}{a}, \frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}, \frac{CM}{MA} = \frac{a}{c}$$

که با ضرب آن‌ها در یکدیگر، به دست می‌آید:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

بنابراین، نیمسازهای AL، BM و CN، در مثلث ABC، از یک نقطه می‌گذرند.

۲۵۵. برای جمله‌های $u_1, u_2, \dots, u_n$ از تصاعد هندسی داریم:

$$u_1 : u_2 = u_n : u_{n+1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

فرض می‌کنیم، تصاعد هندسی مفروض، صعودی باشد، در این صورت، u_1 کوچکترین و u_{n+1} بزرگترین جمله آن خواهد بود. بنابراین برابری مشهور اقلیدس، داریم:

$$u_{n+1} + u_1 > u_2 = u_n,$$

$$u_{n+1} > u_n + (u_2 - u_1)$$

و در نتیجه، برای $n = 2, 3, 4, \dots$ خواهیم داشت:

$$u_3 > u_2 + (u_2 - u_1)$$

$$u_4 > u_3 + (u_2 - u_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_{n+1} > u_n + (u_2 - u_1)$$

از مجموع این نابرابری‌ها، به دست می‌آید:

$$u_{n+1} > u_2 + (n-1)(u_2 - u_1) \quad (1)$$

که اگر شرط مساله را به حساب آوریم، داریم:

$$u_2 + (n-1)(u_2 - u_1) = a_2 + (n-1)(a_2 - a_1) = a_{n+1} \quad (2)$$

و سرانجام، از رابطه‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$u_{n+1} > a_{n+1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

*

یاکوب برنولی (۱۶۵۴ - ۱۷۰۵)، دانشمند سوییسی و استاد دانشگاه

بال بود. کارهای او در زمینه هندسه دیفرانسیلی، محاسبه واریاسیونی (که خود بنیان‌گذار آن بود) و فیزیک ریاضی مشهور است.

۲۰۶. فرض می‌کنیم، اسب را به x پیستول خریده باشد. در این صورت،

با فروش آن، به اندازه $\frac{x^2}{100}$ پیستول ضرر کرده است. بنابراین شرط مساله، باید

داشته باشیم:

$$x - \frac{x^2}{100} = 24$$

با حل این معادله درجه دوم، دو جواب به دست می‌آید: $x_1 = 40$ ، $x_2 = 60$.
بنابراین، اسب را به ۴۰ یا ۶۰ پیستول خریده است.

*

این مساله را، ایتن به زو (۱۷۳۰ - ۱۷۸۳)، ریاضی‌دان فرانسوی

تنظیم کرده است. بررسی نظریه عمومی معادله‌ها، (۱۷۷۹) و قضیه مشهور مربوط به بخش‌پذیری چند جمله‌ای جبری بر دو جمله‌ای $x - a$ - که در آن a ریشه‌ای از چند جمله‌ای است - (قضیه به زو)، متعلق به او است. به زو، همچنین، کتاب‌های درسی زیادی تألیف کرد که، در زمان او، به طور گسترده‌ای، مورد استفاده قرار می‌گرفت.

۲۰۷. اثبات را با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

(۱) حکم، برای $n = 1$ درست است، زیرا در این حالت داریم:

$$f_1(x) = a_0 x + a_1,$$

$$f_1(x) = a_0(x-b) + a_0b + a,$$

$$f_1(x) = a_0(x-b) + f_1(b)$$

از رابطهٔ اخیر دیده می‌شود که باقی ماندهٔ تقسیم $f_1(x)$ بر $x-b$ برابر است با $f_1(b)$.

(۲) اکنون فرض می‌کنیم، حکم به ازای $n=k$ درست باشد، ثابت می‌کنیم، در این صورت، به ازای $n=k+1$ هم درست است. بنابراین فرض داریم:

$$f_k(x) = (x-b) \cdot \varphi(x) + f_k(b)$$

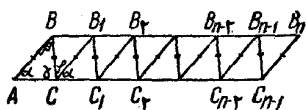
$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= a_0x^{k+1} + a_1x^k + \dots + a_kx + a_{k+1} = \\ &= x(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k) + a_{k+1} = \\ &= xf_k(x) + a_{k+1} = x[(x-b) \cdot \varphi(x) + f_k(b)] + a_{k+1} = \\ &= x(x-b)\varphi(x) + xf_k(b) + a_{k+1} \end{aligned}$$

باقی ماندهٔ تقسیم $f_{k+1}(x)$ بر $x-b$ برابر است با باقی ماندهٔ تقسیم $xf_k(a) + a_{k+1}$ (که یک دو جمله‌ای درجه اول است) بر $x-b$ ولی، در (۱)، باقی ماندهٔ تقسیم دو جمله‌ای درجه اول را بر $x-b$ پیدا کردیم، که برابر می‌شود با

$$bf_k(b) + a_{k+1} = a_0a^{k+1} + a_1b^k + \dots + a_kb + a_{k+1} = f_{k+1}(b)$$

به این ترتیب، حکم برای $u=k+1$ ثابت شد که، در نتیجه، برای هر مقدار n ثابت است.

۲۰۸. اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم زاویه‌های مثالی



شکل ۶۳

مثل ABC، بزرگتر از $2d$ باشد.

ضلع AC را ادامه می‌دهیم (شکل

۶۳) و از نقطه C و در سمت راست آن،

$n-1$ پاره خط $CC_1, C_1C_2, \dots, C_{n-2}C_{n-1}$

$C_1C_2, \dots, C_{n-2}C_{n-1}$ را برابر با ضلع AC جدا می‌کنیم:

$$CC_1 = C_1C_2 = \dots = C_{n-2}C_{n-1} = AC$$

حالا، روی این پاره خط‌ها، مثلث‌های

$$C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}, \dots, C_1B_2C_2, CB_1C_1$$

را برابر مثلث مفروض، می‌سازیم، یعنی

$$\triangle_{ABC} = \triangle_{CB_1C_1} = \dots = \triangle_{C_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}}$$

اکنون، نقطه‌های B و B_1 ، B_1 و B_2 ، $\dots$ ، B_{n-2} و B_{n-1} را به وسیله پاره‌خط‌های راستی به هم وصل می‌کنیم (این که، این نقطه‌ها روی يك خط راست واقع باشند، هنوز برای ما معلوم نیست). مثلث‌های برابر BCB_1 ، $B_1C_1B_2$ ، $B_2C_2B_3$ ، $\dots$ ، $B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$ به دست می‌آیند.

روی پاره خط $B_{n-1}C_{n-1}$ هم، مثلث $B_{n-1}C_{n-1}B_n$ را برابر مثلث‌هایی که هم اکنون به وجود آورده‌ایم، می‌سازیم.

روشن است که اگر دوزلع يك مثلث با دوزلع از مثلث ديگر برابر و زاويه بين اين دوزلع، دريك مثلث، بزرگتر از زاويه نظير آن در مثلث ديگر باشد، ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر خواهد بود. اين حکم را در مورد مثلث‌های ABC و BCB_1 به کار می‌بريم، نتيجه می‌شود: $BB_1 < AC$ و، از آن جا، $AC - BB_1 > 0$ ، يعنی $AC - BB_1$ يك پارمخت است.

از آن جا که خط شکسته، همیشه بزرگتر است از پاره خطی که دوسر خط شکسته را به هم وصل می کند، داریم:

$$AB + BB_1 \times B_1 B_2 + \dots + B_{n-1} B_n + B_n C_{n-1} > \\ > AC + CC_1 + C_1 C_2 + \dots + C_{n-1} C_n$$

از آن جا

$$AB + n \cdot BB_1 + B_n C_{n-1} > n \cdot AC$$

که با توجه به این که $B_n C_{n-1} = AB$ ، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\gamma_{AB} + n \cdot BB_1 > n \cdot AC \Rightarrow n(AC - BB_1) < \gamma_{AB}$$

نا برابری اخیر، با اصل ارشمیدس متناقض است که می گوید: «برای هر دو پاره خط دلخواه، می توانیم پاره خط کوچکتر را به تعداد محدودی تکرار کنیم، به نحوی که، نتیجه، از پاره خط دیگر، بزرگتر شود»، بنابراین اصل، برای پاره خطهای $AC - BB_1$ و AB_2 می توان عدد طبیعی n را به اندازه کافی، طوری بزرگ انتخاب کرد که نابرابری زیر برقرار باشد:

$$n(AC - BB_1) > r_{AB}$$

تضاد منطقی پیش می‌آید. از این جا نتیجه می‌شود، در دستگاه هندسی که، اصل ارشمیدس در مورد آن صادق باشد، مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، نمی‌تواند از $2d$ بیشتر شود.

*

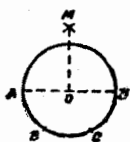
آدریان ماری لژاندر (۱۷۵۲ - ۱۸۳۳)، یکی از ریاضی‌دانان برجستهٔ فرانسوی است. شهرت او، به خاطر کارهایی است که در زمینهٔ آنالیز ریاضی و محاسبهٔ واریاسیونی انجام داده است. نخستین دانشمندی بود که روش حداقل مربع‌ها را کشف کرد (۱۸۰۵) و در محاسبه‌های زمین‌سنجی خود به کار برد. تالیف «مقدمات هندسه» چه در فرانسه و چه بیرون از مرزهای آن، انتشار گسترده‌ای یافت. مثلاً، باید گفت که لباچوسکی (۱۷۹۲ - ۱۸۵۶)، ریاضیات را با مطالعهٔ همین کتاب آغاز کرد.

مساله‌ای را که در این جا حل کردیم، از رسالهٔ لژاندر به نام «اندیشه‌ای دربارهٔ خط‌های موازی» (۱۸۳۳)، گرفته شده است. همین مساله، به صورت يك قضیه، در «مقدمات هندسه» او هم آمده است.

۲۰۹. این مساله به ناپلئون منسوب است. برای حل آن ابتدا به کمک پرگار، از نقطهٔ دلخواهی واقع بر محیط دایره، سه نقطهٔ A, B, C و D را طوری جدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AB = BC = CD = r$$

که در آن، r عبارت است از شعاع دایرهٔ مفروض (شکل ۶۴).



شکل ۶۴

AC ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع

محاط در دایره و برابر است با $r/\sqrt{3}$. از نقطه‌های A و D ، که در دو انتهای قطر AD قرار دارند، با شعاع برابر AC ، دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. حالا باید دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ OM باز کنیم تا، به کمک آن، بتوانیم محیط دایره را به چهار بخش برابر تقسیم کنیم. در واقع داریم:

$$OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r/\sqrt{2}$$

یعنی OM برابر است با ضلع مربع محاط در دایره که راس‌های آن، محیط دایره

را به چهار قسمت برابر تقسیم می کنند.

۲۱۰. اثبات این حکم، با استدلال زیر به دست می آید:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = \\ = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$$

که در آن داریم:

$$a^2 + 2a + 2 = (a + 1)^2 + 1 \neq 1,$$

$$a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$$

به این ترتیب، $a^4 + 4$ دارای دو مقسوم علیه است که هیچ کدام از آن ها برابر خود عدد و یا واحد نیستند. در نتیجه، این عدد، عددی اول نیست.

*

این مساله به سوفیا ژرمن (۱۷۷۶-۱۸۳۱)، زن ریاضی دانی تعلق دارد که، اصل او، فرانسوی است. به خاطر رساله ای که به خاطر نوسان های صفحه های کشسان نوشت، جایزه فرهنگستان علوم پاریس را به او دادند.

۲۱۱. فرض کنید: $a < p$ و $b < p$ ، که در آن، p عددی است اول.

ثابت می کنیم، $a.b$ بر p بخش پذیر نیست.

از برهان خلف استفاده و فرض می کنیم $a.b$ بر p بخش پذیر باشد. در این صورت، کوچکترین عدد مثبت $b_1 \geq b$ وجود دارد که از p بزرگتر است و اگر در a ضرب شود، حاصل ضربی می دهد که بر p بخش پذیر است. با تقسیم b_1 بر p به دست می آید:

$$b_1 = pm + n$$

که در آن $n < p < b_1$. از آن جا

$$n = b_1 - pm$$

دو طرف این رابطه را در a ضرب می کنیم، به دست می آید

$$an = ab_1 - apm$$

an باید بر p بخش پذیر باشد، زیرا هم ab_1 و هم apm مضربی از p

هستند.

معلوم شد که an باید بر p بخش پذیر باشد، ولی $n < p$ و، بنابراین،

b_1 کوچکترین عدد مثبتی نیست که ، به ازای آن ، ab_1 بر p بخش پذیر است.

*

کارل فردریک گوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵)، دانشمند آلمانی که معاصرانش، او را «سلطان ریاضی دانان» می نامیدند . استعداد ریاضی گوس ، از دوران کودکی ظاهر شد. خود او ، وقتی دوران کودکی را به یاد می آورد ، به شوخی می گفت: «من شمردن را ، پیش از حرف زدن یاد گرفتم».

گوس ، در برانشویک ، در خانواده یك استاد لوله کش به دنیا آمد. آموزش های اولیه را در مدرسه محل تولد خود ، به مدت ۷ سال ادامه داد. در آن جا بود که به خاطر استعداد درخشان ریاضی خود ، همیشه موجب شگفتی معلم و دوستان خود می شد. او آموزش عالی خود را در دانشگاه گوتینگن دید. بعدها (۱۸۰۷)، تقریباً به مدت ۵۰ سال ، کرسی استادی ریاضیات و اخترشناسی همین دانشگاه را به عهده داشت . در ۱۹ سالگی ، وقتی که هنوز روی نیمکت دانشجویی نشسته بود ، کشفی مهم ارائه کرد: به طور کامل روشن کرد که در چه حالت هایی می توان π ضلعی منتظم را ، به کمک پرگار و خط کش ، رسم کرد. به ویژه ، باحل معادله $x^{17} - 1 = 0$ توانست هفده ضلعی منتظم را ، به کمک پرگار و خط کش ، رسم کند .

به اعتراف خود گوس ، کارهای بفرنج و طولانی محاسبه ای (که به محاسبه های اخترشناسی مربوط می شد) ، نه تنها او را خسته نمی کرد ، بلکه موجب شادی و رضایت درونی او هم می شد.

گوس ، به کمک محاسبه ، توانست با چنان دقتی جای سیارک پیرس را پیدا کند که اخترشناسان موفق شدند ، آن را در همان جایی که او معین کرده بود ، پیدا کنند.

گوس ، ضمن کار در زمینه ریاضیات ، توانست نظریه رشته ها و نظریه معادله های دیفرانسیلی را پیش ببرد و تکامل ببخشد . قضیه اصلی جبر ، متعلق به او است که ، بنابر آن ، هر معادله درجه π ام ، دست کم دارای يك ریشه است که ، ضمناً ، می تواند ریشه ای موهومی هم باشد . در رساله «بررسی هایی در باره حساب» خود ، پایه های «نظریه عددها» را ، به صورت

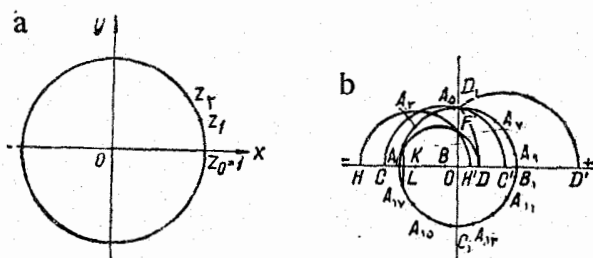
امروزی آن، طرح ریخت. کارهای اساسی زیادی در زمینه نظریه دیفرانسیلی
عددها انجام داد. در زمینه فیزیک، روی نظریه مغناطیس و بعضی از
مسئله‌های اپتیک کار کرد.

در سال ۱۸۱۸، در نامه‌هایی که به بعضی از دوستانش نوشته است،
درباره امکان وجود هندسه نااقلیدسی در کنار هندسه اقلیدسی، صحبت
می‌کند. ولی، با کمال تأسف، هرگز هیچ مقاله یا رساله‌ای، در این باره،
منتشر نکرد.

۲۱۲. حل این مسئله، به این جا منجر می‌شود که محیط دایره به شعاع
واحد را، به ۱۷ بخش برابر تقسیم کنیم. برای این منظور، باید بتوانیم
نقطه‌های

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

را بسازیم (شکل ۶۵-ا)، که در آن، $i = \sqrt{-1}$ و $k = 0, 1, 2, \dots, 16$ و عبارت z_k
از ریشه‌های معادله $z^{17} - 1 = 0$.



شکل ۶۵

فرض می‌کنیم:

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$$

از آن جا، بنا بر قانون مشهور موآور، خواهیم داشت:

$$\varepsilon^k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots, 16$. ریشه‌های معادله

$$z^{17} - 1 = 0$$

عبارتند از عددهای

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{16}$$

همه این ریشه‌ها، همان‌طور که از عبارت‌های مربوط به آن‌ها دیده می‌شود، باهم اختلاف دارند و رأس‌های يك ۱۷ ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع واحد را تشکیل می‌دهند. اکنون توجه می‌کنیم که

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{17} \cdot \varepsilon^{-k} = 1 \times \varepsilon^{-k} = \varepsilon^{-k}$$

بنابراین، ریشه‌های هفدهم واحد را، می‌توان به این صورت نوشت:

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^8, \varepsilon^{-8}, \dots, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$$

می‌دانیم

$$z^{17} - 1 = (z - 1)(z^{16} + z^{15} + \dots + z^2 + z + 1)$$

بنابراین، همه ریشه‌های هفدهم واحد، به جز ۱، باید در معادله زیر صدق کنند.

$$z^{16} + z^{15} + \dots + z^2 + z + 1 = 0$$

یعنی

$$\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \dots + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

یا

$$\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \dots + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1$$

و یا معادل آن

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \dots + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} = -1$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}) +$$

$$+ (\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7}) = -1$$

جمله‌ها طوری تنظیم شده‌اند که، در هر پرانتز، هر جمله، از مجذور جمله قبلی به دست آید مجموع داخل پرانتزها را، به ترتیب، با η و η_1 نشان می‌دهیم.

در این صورت

$$\eta + \eta_1 = -1$$

حالا، اگر η و η_1 را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$\eta\eta_1 = -4$$

زیرا، ضمن عمل ضرب، از هر توان ε ، چهاربار پیدا می‌شود.
از دو رابطه اخیر، معلوم می‌شود که η و η ، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad (1)$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, \quad \eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

ضمناً، $\eta_1 < 0$ و $\eta > 0$.

اکنون، همه ریشه‌های هفدهم موهوم می‌واحد را، به چهار گروه تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در هر کدام از آن‌ها، هر جمله، برابر با توان چهارم جمله قبل باشد.

اگر مجموع جمله‌های گروه‌ها را، به ترتیب، z_1, z, z_2 و z_3 بنامیم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = z \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = z_1 \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = z_2 \\ \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = z_3 \end{cases} \quad (*)$$

از این‌جا، به سادگی معلوم می‌شود:

$$\begin{cases} z + z_1 = \eta \\ z \cdot z_1 = -1 \end{cases}$$

بنابراین، z و z_1 ، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$x^2 - \eta x - 1 = 0 \quad (2)$$

و از آن‌جا

$$z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}, \quad z_1 = \frac{\eta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}$$

ضمناً $z > 0$ و $z_1 < 0$.

از همان دستگاه برای‌های (*) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} z_2 + z_3 = \eta_1 \\ z_2 \cdot z_3 = -1 \end{cases}$$

در این جا هم، z_2 و z_3 ، ریشه های این معادله اند:

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0 \quad (3)$$

از آن جا

$$z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}, \quad z_3 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}$$

ضمناً $z_2 > 0$ و $z_3 < 0$.

فرض می کنیم

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$$

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = y_1$$

به دست می آید:

$$\begin{cases} y + y_1 = z \\ y \cdot y_1 = z_2 \end{cases}$$

که در آن ها، z عبارت است از ریشه مثبت معادله (۲) و z_2 برابر است با ریشه مثبت معادله (۳). y و y_1 ، ریشه های این معادله اند:

$$x^2 - zx + z_2 = 0 \quad (4)$$

از آن جا

$$y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}, \quad y_1 = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}$$

ضمناً $y > y_1$ زیرا داریم:

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{17}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2 \cos \frac{8\pi}{17}$$

اکنون، مقدار ε را، از معادله زیر به دست می آوریم:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y \Rightarrow \varepsilon^2 - y\varepsilon + 1 = 0$$

از آن جا

$$\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1} \quad (5)$$

علامت جلو رادیکال را، به این جهت، مثبت گرفته ایم که $y = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1} = \frac{y}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \\ &= \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17} = \varepsilon \end{aligned}$$

رابطه (5) نشان می دهد که ریشه هفدهم واحد را می توان به کمک رادیکال های با فرجه 2 نشان داد و، بنابراین، می توان آن را به کمک خط کش و پرگار رسم کرد. به این ترتیب، به پرسش مربوط به رسم هفده ضلعی منتظم، به کمک خط کش و پرگار، پاسخ مثبت داده می شود. حالا، طریقه رسم را نشان می دهیم. برای این منظور، این پاره خط ها را می سازیم:

$$1) \quad \eta = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2},$$

$$2) \quad \eta_1 = -\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2},$$

$$3) \quad z = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1},$$

$$4) \quad z_1 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1},$$

$$5) \quad y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_1}$$

با رسم y ، دیگر محیط دایره، به سادگی، به 17 بخش برابر تقسیم

می شود. در واقع، همان طور که قبلاً دیدیم، $y = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$ ، بنابراین،

وتری از دایره است که دور آس متوالی هفده ضلعی منتظم را، $\frac{y}{2} = \cos \frac{2\pi}{17}$

به هم وصل می کند. خود رسم، به این ترتیب انجام می شود (شکل ۶۵-ب):
 (۱) دایره به شعاع واحد را در نظر می گیریم و قطرهای افقی و قائم
 A_1B_1 و D_1C_1 را رسم می کنیم؛

(۲) روی محوری که بر قطر A_1B_1 منطبق است، جهت از چپ به راست،
 یعنی از A_1 به B_1 را، جهت مثبت، و جهت عکس آن، یعنی از B_1 به A_1
 (از راست به چپ) را، جهت منفی می گیریم، به نحوی که در سمت راست
 صفر، پاره خطهای مثبت و در سمت چپ آن، پاره خطهای منفی واقع باشند؛

$$(۳) \text{ پاره خط } OB = -\frac{1}{4} \text{ را می سازیم؛}$$

(۴) در این صورت داریم:

$$BD_1 = \sqrt{OB^2 + OD_1^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

(۵) به مرکز B و شعاع برابر BD_1 دایره ای رسم می کنیم و محل
 برخورد آن را با محور افقی، C و C' می گیریم. در این صورت داریم:

$$BC' = \frac{\sqrt{17}}{4}, \quad BC = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

(۶) به مرکزهای C و C' و، به ترتیب، باشعاعهای CD و CD_1
 دایره هایی رسم می کنیم تا محور افقی را، در نقطه های D و D' قطع کنند؛
 (۷) با توجه به شکل ۶۵-ب، به دست می آید:

$$OC = OB + BC = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{17} = -\frac{\eta_1}{2},$$

$$OC' = OB + BC' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{17} = \frac{\eta}{2},$$

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = z,$$

$$OD = OC + CD = -\frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1} = z_2;$$

(۸) نیم دایره ای به قطر A_1D رسم می کنیم، به نحوی که شعاع OD_1
 را، در نقطه F ، قطع کند؛

(۹) به مرکز F و شعاع $FK = \frac{1}{2}OD'$ ، نقطه K را علامت می گذاریم؛

(۱۰) به مرکز K و شعاع KF دایره ای رسم می کنیم تا محوراقتی را در H و H' قطع کند؛

(۱۱) در این صورت، داریم:

$$-OH + OH' = HH' = 2KH' = OD' = z,$$

$$-OH.OH' = OF^2 = -OA_1.OD = OD = z_2$$

($-OA_1 = 1$). بنابراین، پاره خطهای $-OH$ و OH' ، ریشه های این

$$x^2 - zx + z_2 = 0$$
 معادله اند:

و این، همان معادله (۴) است که ریشه های آن عبارتند از y_1 و y . به این ترتیب

$$y = -OH, \quad y_1 = OH' \quad (y > y_1);$$

(۱۲) y ، یعنی ریشه بزرگتر را، در نظر می گیریم و این پاره خط را می سازیم:

$$OL = \frac{y}{2} = \frac{-OH}{2}$$

(۱۳) عمودی از نقطه L، بر محور افقی، اخراج می کنیم تا دایره را

در نقطه های A_2 و A_{17} قطع کند؛ ضمناً، کمان A_1A_2 برابر $\frac{2\pi}{17}$ و وتر آن، ضلع ۱۷ ضلعی مورد نظر است؛

(۱۴) برای رسم ۱۷ ضلعی منتظم، کافی است کمان A_1A_2 را، پشت سرهم، روی محیط دایره جدا کنیم و نقطه هایی را که به دست می آید، به طور متوالی، به هم وصل کنیم.

همان طور که قبلاً هم یادآوری کردیم، گوس مسأله مربوط به رسم ۱۷ ضلعی منتظم را در ۱۹ سالگی حل کرد. مسأله کلی امکان رسم n ضلعی منتظم، او را به اثبات این قضیه مهم کشانید: «وقتی و تنها وقتی می توان n ضلعی منتظم را، به کمک خط کش و پرگار، رسم کرد که عدد n بتواند به این صورت درآید:

$$2^m p_1 \cdot p_2 \dots p_s$$

که در آن، $p_1, p_2, \dots, p_s$ ، عددهای اول مختلفی به صورت $2^{2^k} + 1$ هستند». در حالت خاصی که n عددی اول باشد، شرط لازم برای این که بتوان

n ضلعی منتظم را رسم کرد، این است که n به صورت $2^k + 1$ باشد.
 عدد ۱۷، به همین صورت است (به ازای $k=2$) و، بنابراین، ۱۷ ضلعی منتظم، به کمک خط کش و پرگار، قابل رسم است. با همین استدلال، معلوم می شود که n ضلعی های منتظم زیر را می توان رسم کرد:
 - مثلث ($3 = 2^0 + 1$ به ازای $k=0$)؛
 - پنج ضلعی ($5 = 2^2 + 1$ به ازای $k=2$)؛ و غیره.
 بنابراین قضیه گوس نمی توان، مثلاً، هفت ضلعی منتظم را به کمک خط کش و پرگار رسم کرد، زیرا عدد ۷ را نمی توان به صورت $2^k + 1$ نوشت.
 ۲۱۳. مسأله، دو راه حل دارد:

راه حل اول

۵	۸	۱۲
۰	۰	۱۲
۰	۸	۴
۵	۳	۴
۰	۳	۹
۳	۰	۹
۳	۸	۱
۵	۶	۱
۰	۶	۶

راه حل دوم

۵	۸	۱۲
۰	۰	۱۲
۵	۰	۷
۵	۷	۰
۴	۸	۰
۴	۰	۸
۰	۴	۸
۵	۴	۳
۱	۸	۳
۱	۰	۱۱
۰	۱	۱۱
۵	۱	۶
۰	۶	۶

*

این مسأله را، سیمون دنیس پواسون (۱۷۸۱-۱۸۴۰)، ریاضی دان فرانسوی در جوانی حل کرد. همین مسأله بود که، به قول خود پواسون، سرنوشت او را تعیین کرد: او تصمیم گرفت، دنبال ریاضیات را بگیرد.

پواسون به قول خود وفا کرد. او ریاضیات را ادامه داد و ریاضی دانی با شهرت جهانی شد. او به عضویت بسیاری از فرهنگستان های اروپایی درآمد و، منجمله، عضو افتخاری فرهنگستان پترزبورگ شد.

۲۱۴. باید ثابت کرد، واسطه عددی n عدد مثبت، از واسطه هندسی آن ها کوچکتر نیست. این حکم را به طریقه های مختلفی می توان ثابت کرد، در این جا، راه حل خود کوشی را می آوریم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

درستی نابرابری، به ازای $n=1$ درست است. ثابت می کنیم، این نابرابری $n=2$ هم صادق است، یعنی

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

در واقع داریم:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}) = \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

اکنون، ثابت می کنیم، اگر نابرابری به ازای $n=m$ برقرار باشد، به ازای $n=2m$ هم برقرار است. در واقع داریم:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2m-1} + x_{2m}}{2m} &= \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \dots + \frac{x_{2m-1} + x_{2m}}{2} \geq \\ &\geq \sqrt[m]{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \dots \frac{x_{2m-1} + x_{2m}}{2}} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sqrt[m]{\sqrt{X_1 X_2} \cdot \sqrt{X_3 X_4} \dots \sqrt{X_{2m-1} X_{2m}}} = \\ &= \sqrt[2m]{X_1 X_2 \dots X_{2m-1} X_{2m}} \end{aligned}$$

معلوم شد، وقتی نابرابری برای $n = m$ صادق باشد، برای $n = 2m$ هم صادق است. بنابراین، طبق آن چه ثابت کردیم، این نابرابری برای $n = 4, 8, 16, \dots$ ، یعنی برای هر توان طبیعی ۲، برقرار است.

اکنون ثابت می‌کنیم، نابرابری کوشی، به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است. n را عدد طبیعی دلخواهی می‌گیریم. اگر n برابر توانی از ۲ باشد، بنا بر استدلال فوق، نابرابری برقرار است. درحالتی که n برابر توانی از ۲ نباشد، عدد طبیعی q را طوری پیدا می‌کنیم که $n+q$ برابر توانی از ۲ بشود، یعنی $n+q = 2^m$.

درستی نابرابری زیر را ثابت کرده‌ایم:

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+q}}{n+q} \geq \\ &\geq \sqrt[n+q]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n x_{n+1} \dots x_{n+q}} \end{aligned}$$

این نابرابری، بی‌تردید، برای حالت خاص زیرهم، برقرار است:

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+q} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + q \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}{n+q} \geq \\ &\geq \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \right)^q} \end{aligned}$$

از آن، بعد از ساده کردن سمت چپ نابرابری، به دست می‌آید:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^q}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^{n+q} \geq x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

که بعد از ساده کردن، به دست می آید:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_n$$

و بنابراین

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که x_i ها ($i = 1, 2, \dots, n$) باهم برابر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

در واقع، اگر x_i ها را برابر بگیریم، بلافاصله، برابری دو طرف تأیید می شود. و اگر، دست کم، دو مقدار x_i را نابرابر بگیریم، رابطه با علامت نابرابری به دست می آید، یعنی سمت چپ، بزرگتر از سمت راست خواهد شد. این حکم را ثابت می کنیم. مثلاً، فرض کنید $x_1 \neq x_2$ و بقیه x_i ها، عددهای مثبت دلخواهی باشند؛ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} &= \\ &= \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \cdot x_3 \dots x_n} \end{aligned}$$

ولی می دانیم

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

از آنجا

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3 \dots x_n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

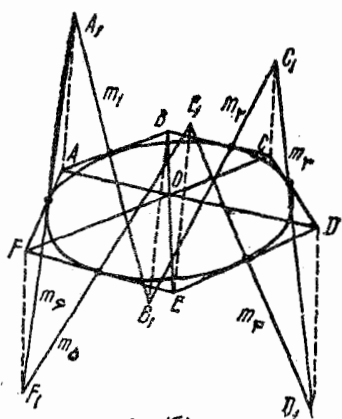
و سرانجام

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

*

اگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، ریاضی دان فرانسوی، به طور عمده، در زمینه آنالیز ریاضی (معادله‌های دیفرانسیلی و نظریه رسته‌ها) و نظریه تابع‌های با متغیر مختلط، کار می‌کرد. کوشی، عضو فرهنگستان علوم پاریس بود.

۲۱۵. مسأله را با روش‌های مختلفی می‌توان حل کرد. ما در این جا، راه حلی را انتخاب کرده‌ایم، که ب‌زاساس استفاده از شکل فضائی قرار دارد. شش ضلعی فضایی $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ را می‌سازیم، به نحوی که



شکل ۶۶

تصویر آن، شش ضلعی مفروض $ABCDEF$ باشد (شکل ۶۶). برای این منظور، هر یک از خط‌های راست $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ را، که بر ضلع‌های شش ضلعی مفروض قرار دارند، به اندازه ۴۵ درجه، دور شعاعی که از نقطه تماس گذشته است، می‌چرخانیم؛ ضمناً، خط‌های راست با اندیس فرد (m_1, m_3, m_5) را در یک جهت، و خط‌های راست با اندیس زوج

(m_2, m_4, m_6) را در جهت دیگر. متذکر می‌شویم که هر خط راست با اندیس فرد، هر خط راست با اندیس زوج را قطع می‌کند و، بنابراین، با آن در یک صفحه قرار می‌گیرد، زیرا این خط‌های راست، نسبت به صفحه عمود بر صفحه شکل، که برشش ضلعی $ABCDEF$ قرار دارد و از نیمساز زاویه‌ای که با تصویر تشکیل داده است، می‌گذرد، قرینه یکدیگرند. نقطه‌های

برخورد m_1 و m_6 ، m_6 و m_5 ، m_5 و m_4 ، m_4 و m_3 ، m_3 و m_2 ، m_2 و m_1 را، به ترتیب، A_1 ، F_1 ، E_1 ، D_1 ، C_1 ، B_1 می نامیم. به این ترتیب، شش ضلعی فضایی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ به دست می آید که، تصویر آن بر صفحه شکل، همان شش ضلعی ABCDEF است.

حالا، رأس های رو به رو را در شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ، به وسیله خط های راست A_1D_1 ، B_1E_1 و C_1F_1 ، به هم وصل می کنیم. این خط های راست، دو به دو یکدیگر را قطع می کنند، زیرا بر یک صفحه قرار دارند. مثلاً، دو خط راست A_1D_1 و B_1E_1 را در نظر می گیریم. آن ها یکدیگر را قطع می کنند، زیرا باهم موازی نیستند و، ضمناً، بر یک صفحه - صفحه خط های متقاطع $m_1 = A_1B_1$ و $m_4 = E_1D_1$ - قرار دارند.

سه خط راست A_1D_1 ، B_1E_1 و C_1F_1 ، باهم روی یک صفحه نیستند و، بنابراین، ضمن این که دو به دو یکدیگر را قطع می کنند، از یک نقطه O_1 می گذرند (این نقطه را، روی شکل، نشان نداده ایم). تصویر O_1 بر صفحه (یعنی نقطه O)، همان محل برخورد خط های راست AD ، BE ، CF است و این، همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

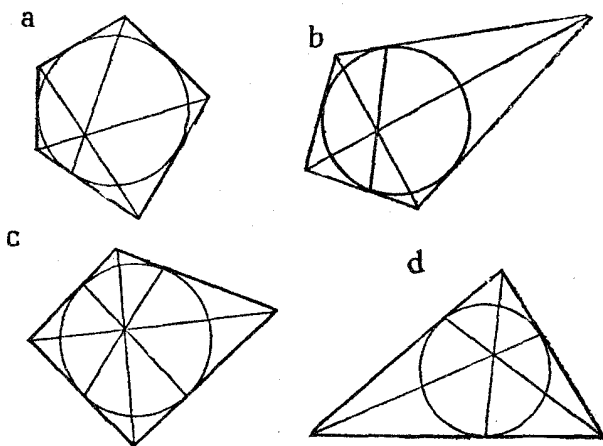
*

شارلز وولیان بریانشون (۱۷۸۵-۱۸۶۴)، ریاضی دان فرانسوی است. خود او، مسأله مربوط به شش ضلعی محیط بردایره را، به کمک قطب و قطبی، حل کرد که به وسیله پونسله، ریاضی دان فرانسوی، پایه گذاری شده بود. بریانشون، مسأله خود را، به کمک تصویر مرکزی، تعمیم داد و برای هر مقطع مخروطی ثابت کرد که، به همین مناسبت، مثل قضیه پاسکال، یکی از قضیه های اساسی هندسه تصویری و کاربردهای آن، به شمار می رود. قضیه کلی بریانشون را، می توان این طور بیان کرد: در هر شش ضلعی که قابل محیط بر یکی از مقطع های مخروطی (دایره، بیضی، سهمی، هذلولی، دو خط راست) باشد، خط های راستی که رأس های رو به رو را به هم وصل می کنند، از یک نقطه (نقطه بریانشون) می گذرند.

جالب است که دو قضیه پاسکال و بریانشون را، می توان، در هندسه تصویری، در ردیف هم قرار داد و یکی را از دیگری نتیجه گرفت. این

نتیجه گیری، از راه «تبدیل نقطه به خط راست یا برعکس»، به دست می آید. ولی از نظر تاریخی، قضیه بریانسون، خیلی دیرتر از قضیه پاسکال - قریب ۱۵۰ سال بعد - ثابت شد.

۲۱۶. يك شش ضلعی محیط بردایره را در نظر می گیریم. بنابه قضیه ای که هم اکنون ثابت کردیم، در این شش ضلعی، خطهای راستی که رأسهای رو به رو را به هم وصل می کنند، از يك نقطه می گذرند (نقطه بریانسون). اگر در این شش ضلعی، دو نقطه تماس دو ضلع مجاور را روی محیط دایره به هم نزدیک کنیم تا برهم منطبق شوند، شش ضلعی به يك پنج ضلعی تبدیل می شود (یکی از ضلعهای آن مضاعف است و نقطه تماس آن با دایره را می توان يك رأس به حساب آورد). بنابراین، حکم مسأله بریانسون در مورد این شکل هم درست است، یعنی، در هر پنج ضلعی محیط بردایره، خطهای راستی که دو زوج رأسهای غیر مجاور را به هم وصل می کنند، با خط راستی که از رأس پنجم و نقطه تماس ضلع رو به رومی گذرد، در يك نقطه به هم می رسند (شکل ۶۷-a).



شکل ۶۷

اکنون، چهار ضلعی محیط بريك دایره را، به عنوان يك شش ضلعی در نظر می گیریم، که در آن، دو ضلع مضاعف وجود دارد و نقطه های تماس آنها با دایره را می توان رأس به حساب آورد. در نتیجه، این حکم را خواهیم

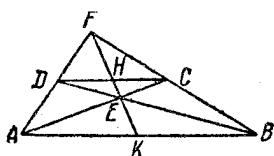
داشت: در هر چهار ضلعی قابل محیط بردایره، دو قطر و خط راستی که نقطه‌های تماس دو ضلع رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از يك نقطه می‌گذرند (شکل ۶۷-ب).

با توجه به همین حکم، می‌توان، به سادگی، حکم کلی زیر را نتیجه گرفت (دلیل آن را خودتان پیدا کنید): در هر چهار ضلعی قابل محیط بردایره، دو قطر و دو خط راستی که نقطه‌های تماس ضلع‌های رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از يك نقطه می‌گذرند (شکل ۶۷-ج).

اگر مثلث محیط بردایره را، به عنوان يك شش ضلعی در نظر بگیریم، هر سه ضلع آن مضاعف می‌شوند. رأس‌های این شش ضلعی عبارتند از سه رأس مثلث و سه نقطه تماس ضلع‌های آن با دایره (روی هم، شش رأس). بنابراین، حکم زیر درست است: در هر مثلث، خط‌های راستی که هر رأس را به نقطه تماس ضلع رو به رو با دایره محاطی وصل می‌کنند، از يك نقطه می‌گذرند (شکل ۶۷-د).

۲۱۷. بنابر مسأله سه وا (شکل

(۶۸) داریم:



شکل ۶۸

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1 \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$\frac{FD}{DA} = \frac{FC}{CB} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

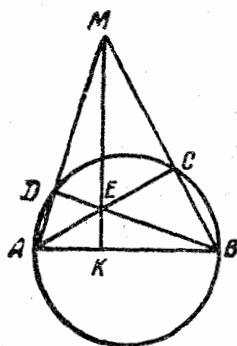
$$\frac{AK}{KB} = 1 \Rightarrow AK = KB$$

البته این مسأله را، بدون استفاده از مسأله سه وا هم، می‌توان حل کرد.

*

یاکوب شیتز (۱۷۹۶-۱۸۶۳)، ریاضی دان سویسی و یکی از بنیان‌گذاران هندسه تصویری، عضو فرهنگستان علوم برلن و، از سال ۱۸۳۵، استاد دانشگاه برلن بود. او توجه زیادی به مسأله‌های ساختمانی هندسه، به

کمک خط کش و پرگار ثابت، داشت.



شکل ۶۹

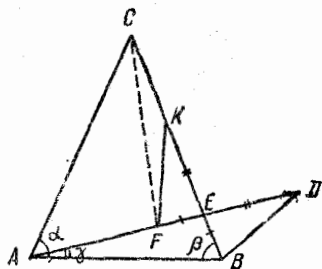
۲۱۸. دوانتهای قطر AB را

به نقطه M وصل می کنیم (شکل ۶۹) و نقطه های برخورد AM و BM را با دایره، به ترتیب، C و D می نامیم. E را نقطه برخورد خط های راست AC و BD می گیریم. در این صورت، خط راست ME، خط راست AB را در نقطه ای مثل K قطع می کند و بر آن عمود است (چرا؟ خودتان دلیل آن را پیدا کنید).

۲۱۹. مثلث متساوی الساقین ABC و مثلث دلخواه و غیر

متساوی الساقین ABD را در نظر می گیریم (شکل ۷۰). قاعده دومثلث یکی هستند؛ فرض می کنیم داشته باشیم:

$$AD + DB = AC + CB$$



شکل ۷۰

مثلث ABE قسمت مشترک دو

مثلث ABC و ABD را تشکیل می دهد. برای این که مساله را حل کنیم، کافی است ثابت کنیم، مثلث BDE، بخشی از مثلث ACE را تشکیل می دهد. برای این منظور، روی پاره خط های EA و EC، به ترتیب،

$EK = EC$ و $EF = EB$ را جدا می کنیم. روشن است که مثلث FKE با مثلث BDE برابر است. حالا باید ثابت کنیم، نقطه F بین نقطه های A و E و نقطه K بین نقطه های C و E قرار دارد.

به مثلث AEB توجه می کنیم. در این مثلث داریم: $\alpha < \beta$ ، زیرا

$\alpha = \beta$ و $\gamma < \alpha$ (طبق فرض، مثلث ABC متساوی الساقین است). از آنجا $AE > BE$ و $AE > EF$ ، زیرا $BE = FE$. بنابراین نقطه F بین نقطه های

A و E قرار دارد.

اکنون، فرض می‌کنیم، نقطه K بین C و E واقع باشد، در این صورت

داریم:

$$AF + FK + KE + EF < AF + FC + CE + EF,$$

$$EF = EB, \quad KE = ED, \quad FK = BD,$$

$$AF + DB + ED + EF < AF + FC + CE + EB,$$

$$AF + FE + ED + DB < AF + FC + CB,$$

$$AD + DB < AF + FC + CB$$

و بنابراین شرط

$$AD + DB = AC + CB$$

بنابراین

$$AC + CB < AF + FC + CB$$

یا

$$AC < AF + FC$$

به نابرابری درستی رسیدیم. بنابراین، حکم نخستین هم در این باره که نقطه K بین نقطه‌های C و E قرار دارد، درست است.

۲۲۰. راه حل شتورم. فرض می‌کنیم، x روز بعد از حرکت پیک اول، دو پیک به هم برسند. راهی که پیک اول، در این مدت، پیموده است، برابر است با مجموع جمله‌های یک تصاعد عددی که جمله‌های اول و آخر آن برابر است

$$\text{با } ۱۰ \text{ و } ۱۰ + \frac{x-1}{4}, \text{ یعنی، این راه برابر است با}$$

$$\left(۱۰ + \frac{x-1}{4} \right) \times \frac{x}{2} = \frac{(۷۹+x)x}{8}$$

پیک دوم، از زمان حرکت، تا لحظه برخورد با پیک اول $x-3$ روز

راه رفته است و روی هم به اندازه

$$\left[۱۴ + \frac{(x-4)2}{3} \right] \frac{x-3}{2} = \frac{(۱۷+x)(x-3)}{3}$$

بنابراین شرط، باید داشته باشیم:

$$\frac{(79+x)x}{8} - \frac{(17+x)(x-3)}{3} - 40 = 0 \quad (1)$$

و یا

$$5x^2 - 126x + 552 = 0 \quad (2)$$

و از آن جا

$$x_1 = 5/72 \dots, x_2 = 19/27 \dots$$

x ، عددی درست در نظر گرفته شده بود، بنابراین، ریشه‌های معادله، با شرط مساله نمی‌سازند. ولی، می‌توان روشن کرد که قسمت‌های درست ریشه‌ها (یعنی ۵ و ۱۹)، به این معناست که دو برخورد وجود دارد: یکی بعد از خاتمه روز پنجم و دیگری بعد از خاتمه روز نوزدهم.

اگر a ، راه پیک اول و b راه پیک دوم به اضافه ۴۰ لیو باشد، با فرض این که اولی به تعداد درست x روز و دومی به تعداد درست $x-3$ روز در راه بوده است، خواهیم داشت:

$$5x^2 - 125x + 552 = 24(b-a) \quad (3)$$

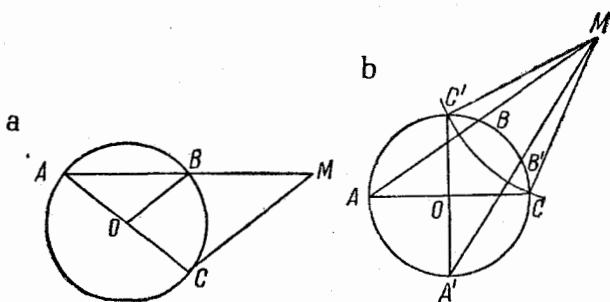
این رابطه روشن است، زیرا معادله (۲) از معادله (۱)، با تغییر علامت همه جمله‌ها و ضمن ضرب در ۲۴ به دست آمده است. اکنون در معادله (۲)، ابتدا عدد ۵ و سپس عدد ۶ را قرار می‌دهیم؛ چون جواب معادله که از ۵/۷۲ کوچکتر است، بین این دو عدد قرار دارد، بنابراین، با قرار دادن ۵ عددی بزرگتر از صفر و با قرار دادن ۶ عدد کوچکتر از صفر به دست می‌آید. ولی به اعتبار اتحاد (۳)، تفاضل $b-a$ همیشه همان علامت سه جمله‌ای $5x^2 - 125x + 552$ را دارد؛ در نتیجه، در انتهای روز پنجم $a < b$ و در انتهای روز ششم $a > b$ می‌شود؛ به این ترتیب، برخورد اول، جایی بین روزهای پنجم و ششم است. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، برخورد دوم، بعد از ۱۹ روز پیش می‌آید. امکان این برخورد را، به سادگی می‌توان فهمید، زیرا پیک دوم، با توجه به این که شتابی بیش از پیک اول دارد، بعد از آن که از پیک اول عقب افتاد، فاصله را جبران می‌کند و به او می‌رسد. اگر این مطلب را بررسی کنیم که، بعد از چند روز، سرعت دو پیک برابر می‌شود، به این نکته پی خواهیم برد: بعد از ۱۳ روز، سرعت‌ها برابر می‌شوند و ۱۳ هم

بین ۵ و ۱۹ قرار گرفته است (راه حل شتورم را، از کتاب پوپوف به نام «مساله‌های تاریخی، با حل مقدماتی»، چاپ ۱۹۳۸، صفحه‌های ۲۱۰-۲۱۱ برداشته‌ایم).

*

ژاک شارل فرانسوا شتورم (۱۸۰۳-۱۸۵۵)، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی (متولد درسویس) و عضو فرهنگستان علوم پاریس، از سال ۱۸۱۰، استاد مدرسه پلی تکنیک در پاریس بود. قضیه‌ای دارد که، بنا بر آن، می‌توان تعداد ریشه‌های یک معادله را، در فاصله معینی، پیدا کرد. کتابی در دو جلد، به عنوان راهنمای آنالیز ریاضی تألیف کرد و مقاله‌های زیادی درباره معادله‌های دیفرانسیلی، اوپتیک و مکانیک نوشت.

۲۲۱. مساله را حل شده فرض می‌کنیم. AM را قاطع مورد نظر (شکل ۷۱-ا) و A و B را نقطه‌های برخورد آن با دایره می‌گیریم. طبق شرط داریم: $AB = BM$ را به مرکز O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا محیط دایره را در C قطع کند. نقطه B را به O و نقطه M را به C وصل می‌کنیم.



شکل ۷۱

به این ترتیب، مثلث ACM به دست می‌آید که پاره خط OB ، وسط دو ضلع آن را به هم وصل می‌کند و لسی می‌دانیم، چنین پاره خطی، همیشه موازی با قاعده و برابر با نصف آن است، یعنی $OB \parallel CM$ و $OB = \frac{1}{2}CM$ یا

$$CM = 2OB = 2R$$

که در آن، R عبارت است از شعاع دایره مفروض.

اکنون دیگر، با استفاده از این تجزیه و تحلیل، می توان قاطع مورد نظر را به سادگی رسم کرد. M را مرکز قرار می دهیم و به شعاع قطر دایره مفروض، دایره ای رسم می کنیم (شکل ۷۱-b) تا دایره مفروض را در نقطه های C و C' قطع کند. هریک از این نقطه ها را به O وصل می کنیم و ادامه می دهیم تا دایره مفروض را در A و A' قطع کنند. قاطع های MA و MA' همان قاطع های مورد نظرند. از خود راه حل معلوم می شود که مساله دو جواب دارد.

*

این مساله را از کتاب «قضیه ها و مساله های مقدماتی» تالیف اژن کاتالان (۱۸۱۴-۱۸۹۱)، ریاضی دان بلژیکی برداشته ایم. این ریاضی دان نوشته های زیادی در زمینه ریاضیات مقدماتی و عالی دارد.

۲۲۲. هانری مونده، حسابگری اعجوبه، که تباری فرانسوی داشت. در خانواده ای روستایی و در روستائی نزدیک شهر نور به دنیا آمد. پسرک، استعداد خارق العاده ای در انجام محاسبه های بغرنج، در ذهن خود، داشت. برای نخستین بار، در سال ۱۸۴۰، توجه صاحب شبانه روزی شهر به او جلب شد و او را پیش پونسله، دانشمند هندسه دان و رئیس وقت فرهنگستان علوم پاریس فرستاد. در آزمایش مقدماتی که در حضور عضوهای فرهنگستان انجام شد، دو پرسش از او کردند: مجذور ۷۵۶ چیست؟ در ۵۲ سال چند دقیقه وجود دارد؟ و مونده، بلافاصله، پاسخ های درست را داد.

پونسله پیشنهاد کرد کمیسیون از ریاضی دانان عضو فرهنگستان، برای مطالعه اساسی استعداد ریاضی پسرک تشکیل شود. کوشی، لیوویل، شتورم و آرگو، در این کمیسیون شرکت داشتند. دسامبر ۱۸۴۰، جلسه آزمایش تشکیل شد و پسرک در برابر پرسش های دشواری قرار گرفت که می بایستی در ذهن خود، آن ها را حل کند. پرسش دوازدهم، همین مساله ای است که ما در این کتاب آورده ایم.

هانری مونده جوان، در برابر بغرنج ترین محاسبه ها در نماند و، به درستی، پاسخ ها را پیدا کرد و نشان داد که، واقعاً، حسابگر اعجوبه ای است. مثلاً در

برابر این پرسش که، تفاوت مجذورهای کدام دو عدد، برابر ۱۳۳ است، بلافاصله پاسخ داد ۶۶ و ۶۷. وقتی که از او پرسیده شد جواب ساده تر کدام است، بعد از ثانیه ای فکر، پاسخ داد: ۱۳ و ۶. او تقریباً بدون فکر و بلافاصله، به این پرسش که مجذور ۲۲۰۴ یا مکعب ۱۰۰۶ چه عددی است، پاسخ داد. مونده، در برابر این مساله هم، خیلی زود خود را تطبیق داد که: عددی پیدا کنید که مکعب آن به اضافه ۸۴، برابر حاصل ضرب همان عدد ۳۷ شود. او، به عنوان جواب، از دو عدد ۳ و ۴ نام برد و به سادگی می توان تحقیق کرد که این دو عدد، با شرطهای مساله می سازند. در واقع

$$۳^۳ = ۲۷; \quad ۲۷ + ۸۴ = ۱۱۱ = ۳ \times ۳۷,$$

$$۴^۳ = ۶۴; \quad ۶۴ + ۸۴ = ۱۴۸ = ۴ \times ۳۷$$

راه حل عادی مساله دوازدهم مونده چنین است:

$$x^2 - y^2 = ۱۳۳,$$

$$(x+y)(x-y) = ۱۳۳ \times ۱ = ۱۹ \times ۷,$$

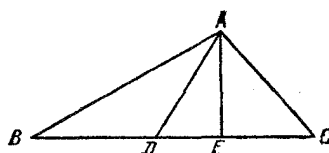
$$\begin{cases} x+y=۱۹ \\ x-y=۷ \end{cases} \Rightarrow x=۱۳, y=۶$$

سپس

$$\begin{cases} x+y=۱۳۳ \\ x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۶۷, y=۶۶$$

۲۲۳. مثلث ABC را در نظر می گیریم. روی ضلع BC و بین دو نقطه B و C، نقطه D را انتخاب و آن را به راس A وصل می کنیم. باید ثابت کنیم:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$$



شکل ۷۲

عمود AE را از راس A بر قاعده BC فرود می آوریم. برای مشخص بودن وضع، E را بین D و C فرض می کنیم (شکل ۷۲). در این صورت، زاویه ADC حاده و زاویه

ADB منفرجه خواهد بود. با استفاده از دوقضیه‌ای که، یکی مربوط به ضلع روبه روی زاویه منفرجه و دیگری مربوط به ضلع روبه روی زاویه حاده در مثلث است، به دست می‌آید:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD.DE \quad (1)$$

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.DE \quad (2)$$

دوطرف رابطه (۱) را در DC و دوطرف رابطه (۲) را در BD ضرب می‌کنیم:

$$AB^2.DC = BD^2.DC + AD^2.DC + 2BD.DE.DC \quad (3)$$

$$AC^2.BD = DC^2.BD + AD^2.BD - 2DC.DE.BD \quad (4)$$

از جمع رابطه‌های (۳) و (۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} AB^2.DC + AC^2.BD &= \\ &= AD^2(BD + DC) + BD.DC(BD + DC) \end{aligned}$$

و بالاخره

$$AB^2.DC + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.DC.BD$$

در کتاب‌های درسی، معمولاً این قضیه را، قضیه ستوارت می‌گویند و، از آن، برای محاسبه بعضی خطاها در مثلث استفاده می‌کنند. از قضیه ستوارت، می‌توان برای محاسبه طول نیمسازها یا میانه‌ها در مثلث، استفاده کرد.

برخی از کتاب‌های مترجم

تألیف:

۱. روش‌های جبر - جلد اول
۲. روش‌های جبر - جلد دوم
۳. جنبش مزدک و مزدکیان
۴. یان هوس و جنبش انقلابی دهقانان چک

ترجمه:

۵. بازی با بی‌نهایت
۶. آفرینندگان ریاضیات عالی
۷. سرگرمی‌های توپولوژی (توپولوژی تجربی)
۸. داستانهای علمی
۹. مسائل ریاضی کنکورها
۱۰. ریاضیات، محتوی، روش و هدف آن - جلد اول
۱۱. ریاضیات، محتوی، روش و هدف آن - جلد دوم
۱۲. علم، جامعه، انسان - جلد اول
۱۳. علم، جامعه، انسان - جلد دوم
۱۴. علم، جامعه، انسان - جلد سوم
۱۵. ریاضیات کار بسته
۱۶. پویائی ریاضیات
۱۷. ورودی به نظریه مجموعه‌ها
۱۸. نظریه مجموعه‌ها

۱۹. داستان مجموعه‌ها
۲۰. در باره حد
۲۱. لباچوسکی و هندسه نااقلیدسی
۲۲. هندسه غیر اقلیدسی
۲۳. يك روز زندگی پسرک قبطی
۲۴. اورایست گالوا (ریاضی‌دان و انقلابی فرانسوی)
۲۵. من ریاضیدانم (سرگذشت سیبرنتیک)
۲۶. آنالیز برداری و نظریه میدان
۲۷. مساله‌های ریاضی، آسان ولی...
۲۸. انعکاس
۲۹. نامساوی‌ها
۳۰. اشتباه استدلال‌های ریاضی
۳۱. نظریه مختصاتی و هندسه چهاربعدی
۳۲. ورودی به منطق ریاضی
۳۳. لگاریتم (سرگذشت استدلالی لگاریتم)
۳۴. استقرای ریاضی
۳۵. ۲۵۰ مساله حساب (از نظریه عددها)
۳۶. سرگرمی‌های هندسه
۳۷. سرگرمی‌های جبر
۳۸. سرگرمی‌های ریاضی
۳۹. در پی فیثاغورث
۴۰. اندیشه ریاضی
۴۱. در قلمرو ریاضیات
۴۲. تقارن در جبر
۴۳. تقارن در هندسه و جبر
۴۴. سرگذشت آنالیز ریاضی
۴۵. تاریخ حساب

۴۶. مسائل مسابقات ریاضی (از کنکورهای اتحاد شوروی)
۴۷. مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی
۴۸. دوره اختصاصی جبر مقدماتی
۴۹. مثلثات مستقیم الخط و کروی
۵۰. عددهای اول
۵۱. هندسه در گذشته و حال
۵۲. اخلاق و انسان

زیر چاپ:

۵۳. خلاقیت ریاضی
۵۴. مسیر ریاضیات جدید
۵۵. هندسه پرگار
۵۶. نظریه نسبیت در تمرین‌ها و مساله‌ها
۵۷. سرگذشت حرکت